

04 Stetige Zufallsvariable, Normalverteilung

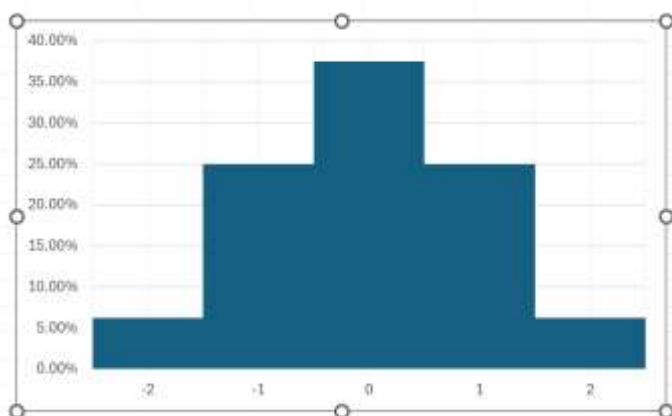
Die in den folgenden Beispielen dargestellten Verteilungen haben ungefähr Glockenform. Sie können durch die sogenannte **Normalverteilung** oder **Gaussverteilung** gut beschrieben werden. Gauss hat diese Verteilung im Zusammenhang mit der Theorie der Messfehler eingeführt. Sie spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik eine zentrale Rolle.

Beispiele für glockenförmige Verteilungen

a) (Quelle: Ineichen)

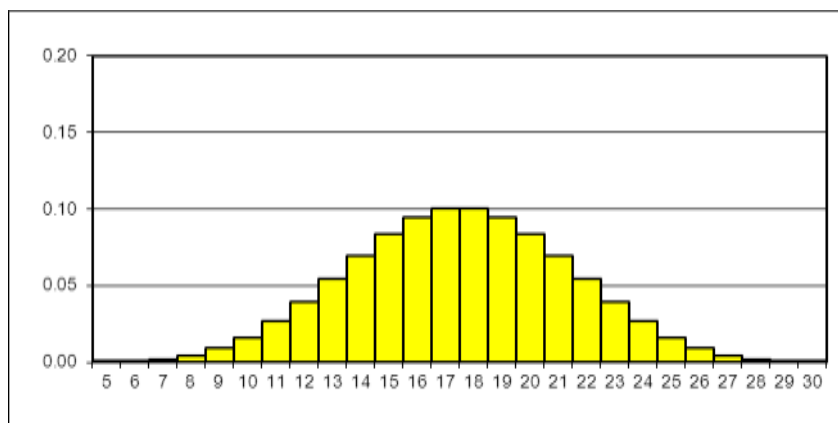
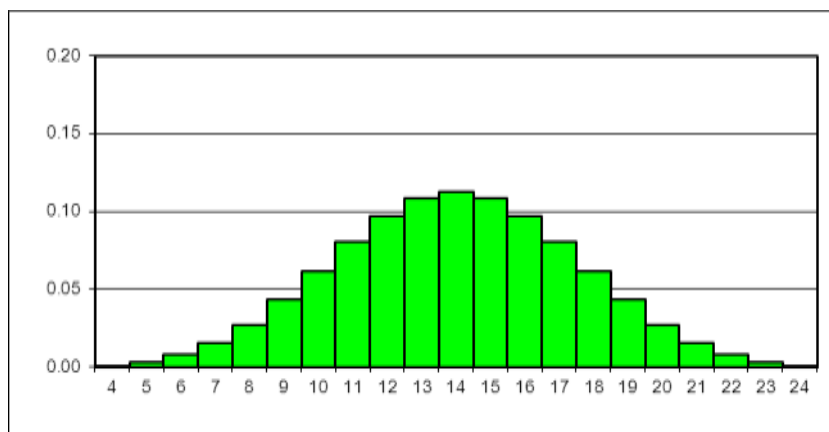
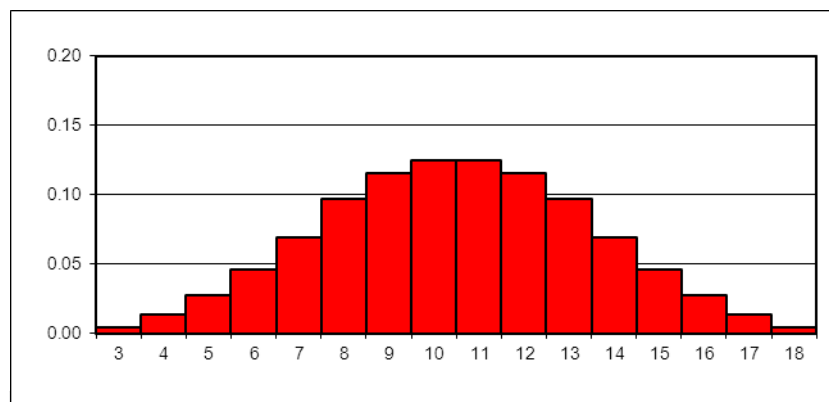
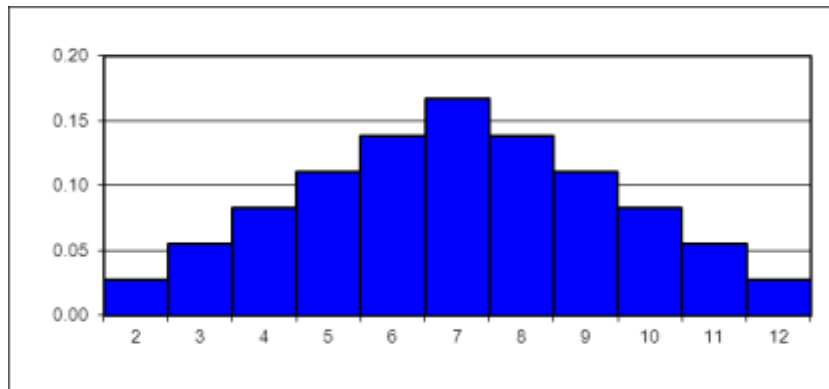
Wird eine physikalische Grösse sehr oft gemessen, so setzen sich die Messfehler aus vielen unabhängigen kleinen Fehlern zusammen, die den Wert teils vergrössern, teils verkleinern. In vielen Fällen kann man deshalb davon ausgehen, dass der binomialverteilte Gesamtfehler angenähert normalverteilt ist.

Elementarfehler	-0.5	0.5			
Zugehörige Wahrscheinlichkeit	0.5	0.5			
bei n=4 Fehlerquellen					
Anzahl positive Elementarfehler	0	1	2	3	4
Anzahl negative Elementarfehler	4	3	2	1	0
Gesamtfehler	-2	-1	0	1	2
Wahrscheinlichkeit	6.25%	25.0%	37.5%	25.0%	6.25%
Der Gesamtfehler ist binomialverteilt. Für n = 4 ist das Histogramm bereits glockenförmig.					
Bei mehr als vier Fehlerquellen ist dies noch ausgeprägter der Fall.					



b)
Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable „Augensumme beim n-fachen Würfeln“
auf der nächsten Seite (Quelle: Strick)

$n = 2$



Bei den Beispielen a) und b) ging es um die Verteilung einer Zufallsvariablen X .
04_stetige Zufallsvariablen, Normalverteilung 26.02.2025/ul

Die folgenden Beispiel zeigen, dass sich in vielen Fällen auch bei Daten angenähert eine ähnliche Verteilung ergibt. Im Abschnitt Induktive Statistik wird gezeigt, wie die Parameter - Erwartungswert μ und Standardabweichung σ geschätzt werden können.

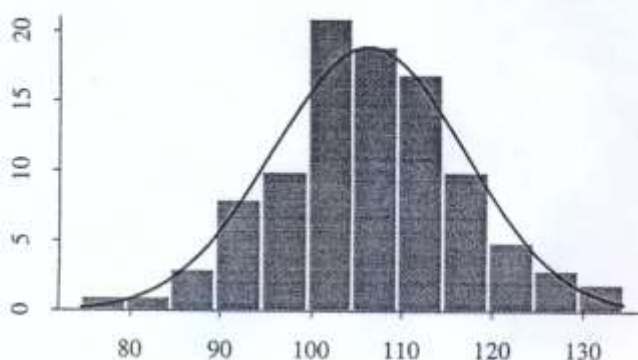
c)
Gewichte von 100 zweiwöchigen Küken
(Quelle: Künsch: Angewandte Statistik))

Gewichte von 100 zweiwöchigen Küken in g

107	117	105	106	114	105	113	88	119	116
108	98	104	126	102	100	120	121	87	110
111	114	121	114	104	94	101	94	95	114
101	82	111	108	100	109	92	96	108	108
97	92	112	105	112	100	108	105	97	119
113	102	103	100	94	102	104	110	127	102
109	100	76	101	95	96	118	91	118	107
105	112	92	99	118	100	130	112	110	103
116	115	96	125	97	114	111	101	101	90
122	106	109	116	103	134	86	124	107	107

Klasse	Stamm	Blatt	Häufigkeiten		
			abs. ℓ	rel. h_ℓ	f_ℓ
75-79	7+	6	1	1	0.01
80-84	8	2	2	1	0.01
85-89	8+	8 7 6	3	3	0.03
90-94	9	4 4 2 2 4 1 2 0	4	8	0.08
95-99	9+	8 5 6 7 7 5 6 9 6 7	5	10	0.10
100-104	10	4 2 0 4 1 1 0 0 2 3 0 2 4 2 0 1 0 3 1 1 3	6	21	0.21
105-109	10+	7 5 6 5 8 8 9 8 8 5 8 5 9 7 5 6 9 7 7	7	19	0.19
110-114	11	4 3 0 1 4 4 4 1 2 2 3 0 2 2 0 4 1	8	17	0.17
115-119	11+	7 9 6 9 8 8 8 6 5 6	9	10	0.10
120-124	12	0 1 1 2 4	10	5	0.05
125-129	12+	6 7 5	11	3	0.03
130-134	13	0 4	12	2	0.02

Stamm-und-Blatt-Darstellung und absolute und relative Häufigkeiten für die Kükengewichte



Eine angepasste Normalverteilung für die Kükengewichte

Bemerkung:

Dreht man die Stamm-Blatt-Darstellung um 90° nach links, dann ist die glockenförmige Verteilung bereits zu erkennen.

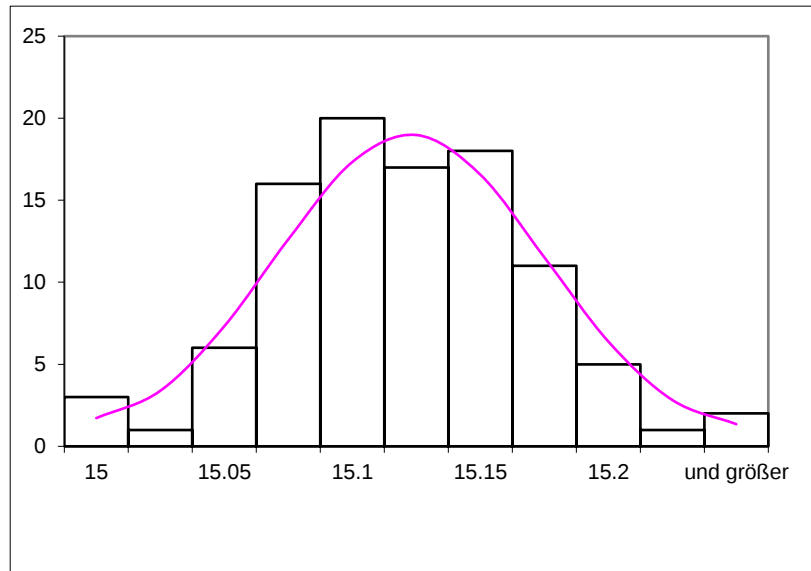
d)

Bei der Produktion von Massenartikeln kommen Abweichungen vom Sollwert vor. Sie ergeben sich aus dem Zusammenwirken einer grossen Zahl von schwachen Einflüssen, die voneinander unabhängig sind und zufällig auftreten.

Stichprobe von n=100 Widerständen (spezifiziert als 15 kOhm +/- 2% (bei 20°C))

Versuch im Schwerpunktfach Angewandte Mathematik und Physik 8.11.2005

Messdaten	
Klasse	Häufigkeit
15	3
15.025	1
15.05	6
15.075	16
15.1	20
15.125	17
15.15	18
15.175	11
15.2	5
15.225	1
und größer	2
Summe	100



e)

Psychologie: Einteilung der IQ-Skala in Intelligenzgrade

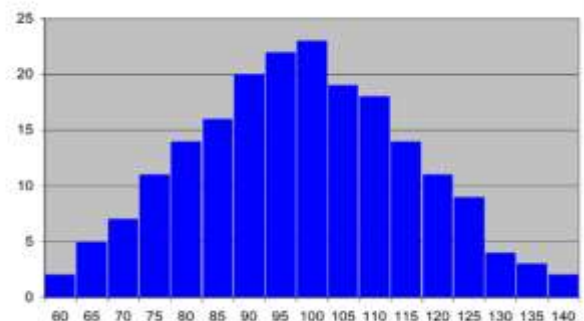
Kritische Fragen: Was wird gemessen? Ist die Normalverteilung ein gutes Modell für den Intelligenzgrad?



❖ Beispiel: IQ-Werte von 200 Probanden

Klasse	Häufigkeit
<= 62	2
63-67	5
68-72	7
73-77	11
78-82	14
83-87	16
88-92	20
93-97	22
98-102	23
103-107	19
108-112	18
113-117	14
118-122	11
123-127	9
128-132	4
133-137	3
>= 138	2

$\bar{x} = 98.5$
 $s = 17.1$

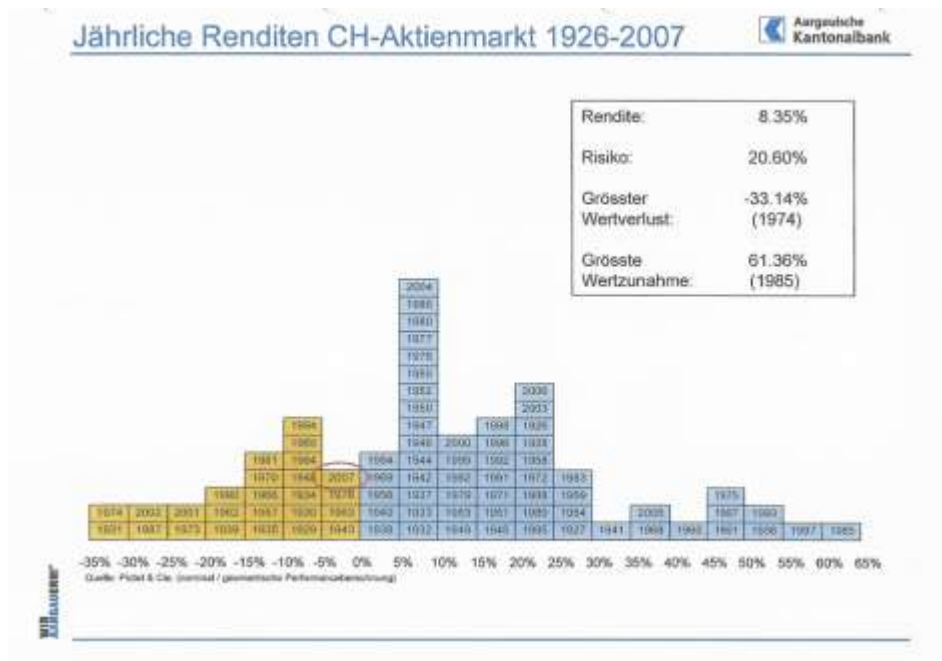
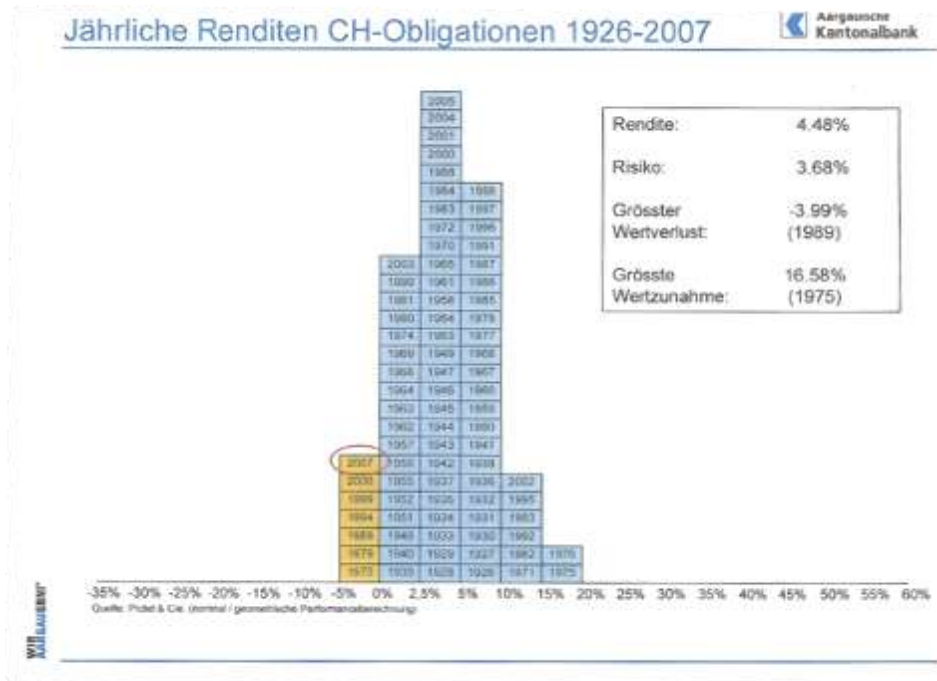


f) Rendite von Obligationen und Aktien

Bei tatsächlichen Daten treten insbesondere bei Aktien grosse Abweichungen vom Erwartungswert häufiger auf. Die Normalverteilung ist also nicht unbedingt ein gutes Modell. In diesem Zusammenhang wird die Standardabweichung als **Volatilität** bezeichnet. Sie ist das Mass für das Risiko einer Anlage.

Das tatsächliche Risiko also von Kursveränderungen (positiv oder negativ) ist tatsächlich grösser als das einer Normalverteilung, denn die Flanken sind stärker besetzt (fat tails).

Hinweis **Value at Risk**: Risiko, dass ein Verlust mit einer Wahrscheinlichkeit grösser als 5% eintritt.



Diese Beispiele illustrieren den von Ljapunoff (1857-1918) formulierten sogenannten **Zentralen Grenzwertsatz**, der vereinfacht folgende Aussage macht:

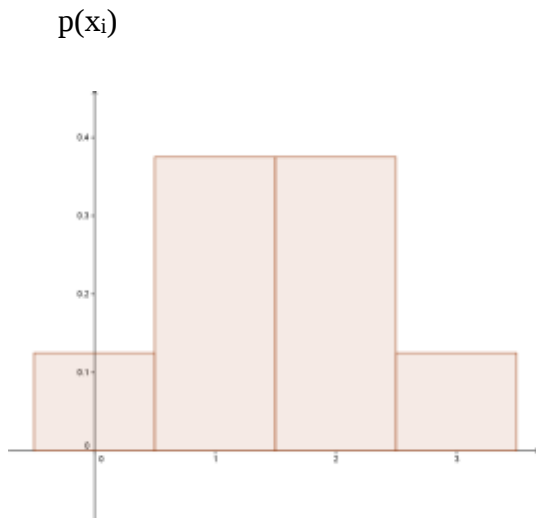
Zentraler Grenzwertsatz

Unter sehr schwachen Bedingungen ist die Summe von sehr vielen unabhängigen Zufallsvariablen angenähert normalverteilt. Diese Aussage gilt unabhängig von der Verteilung der einzelnen Zufallsvariablen.

Im Gegensatz zu den bisherigen diskreten Verteilungen handelt es sich bei der Normalverteilung um eine **stetige (kontinuierliche) Verteilung**. Eine stetige Zufallsvariable kann theoretisch jeden reellen Wert eines Intervalls annehmen (Beispiele: Längen von Werkstücken, Wartezeiten, Lebensdauer von Geräten). Im folgenden sind die beiden Typen von Zufallsvariablen gegenübergestellt. Beachte die Analogie zur Integralrechnung (einerseits Untersumme, Obersumme andererseits bestimmtes Integral).

Diskrete Zufallsvariable X

Beispiel Binomialverteilung



X nimmt endlich viele Werte x_i mit den Wahrscheinlichkeiten $p(x_i) \geq 0$ an

Normierung:

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 1

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$$

Erwartungswert als Summe:

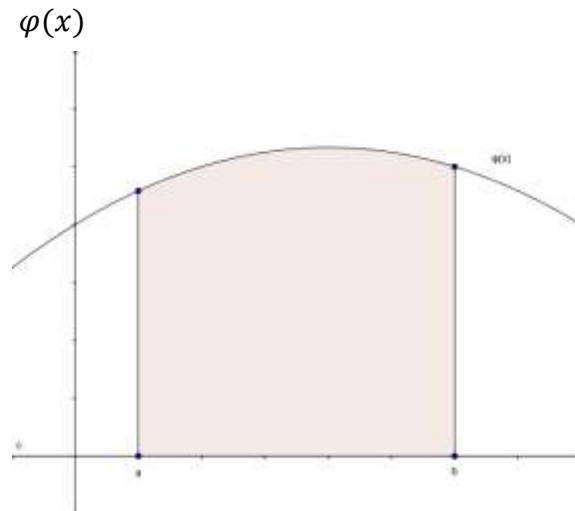
$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i)$$

Varianz $V(X)$, Standardabweichung $\sigma \geq 0$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)$$

Stetige Zufallsvariable X

Beispiel Normalverteilung



An die Stelle der Wahrscheinlichkeiten tritt eine stetige Dichtefunktion φ mit $\varphi(x) \geq 0$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert zwischen a und b annimmt, ist gegeben durch das bestimmte Integral

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x) dx \text{ gegeben.}$$

Das Integral über die Dichte ist gleich 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1 \quad (*)$$

Erwartungswert als bestimmtes Integral

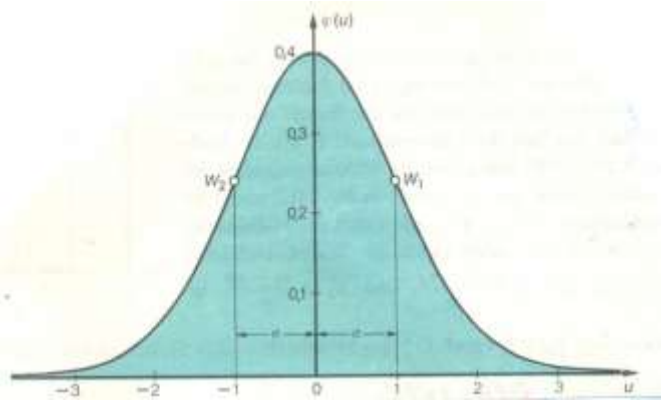
$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x) dx$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot \varphi(x) dx$$

Die in den Beispielen vorkommenden Verteilungen können auf die sogenannte **Standardnormalverteilung** zurückgeführt werden

In der Abbildung ist die sogenannte Standardnormalverteilung mit der folgenden Dichte dargestellt:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$



Der konstante Faktor ist so gewählt, dass die Dichte die Eigenschaft (*) hat. Aus Symmetriegründen ist offensichtlich $\mu = 0$. Mit partieller Integration ergibt sich die Varianz bzw. Standardabweichung zu $\sigma = 1$. Der Parameter $\mu = 0$ legt die Lage des Hochpunkts fest. Bereits früher wurde gezeigt, dass der Streuungsparameter $\sigma = 1$ die beiden Wendestellen bei +1 und -1 bestimmt

Die Normalverteilung hat den amerikanischen Statistiker Youden zu folgendem typografischen Loblied inspiriert:

THE
NORMAL
LAW OF ERROR
STANDS OUT IN THE
EXPERIENCE OF MANKIND
AS ONE OF THE BROADEST
GENERALIZATIONS OF NATURAL
PHILOSOPHY ♦ IT SERVES AS THE
GUIDING INSTRUMENT IN RESEARCHES
IN THE PHYSICAL AND SOCIAL SCIENCES AND
IN MEDICINE AGRICULTURE AND ENGINEERING ♦
IT IS AN INDISPENSABLE TOOL FOR THE ANALYSIS AND THE
INTERPRETATION OF THE BASIC DATA OBTAINED BY OBSERVATION AND EXPERIMENT

Youden

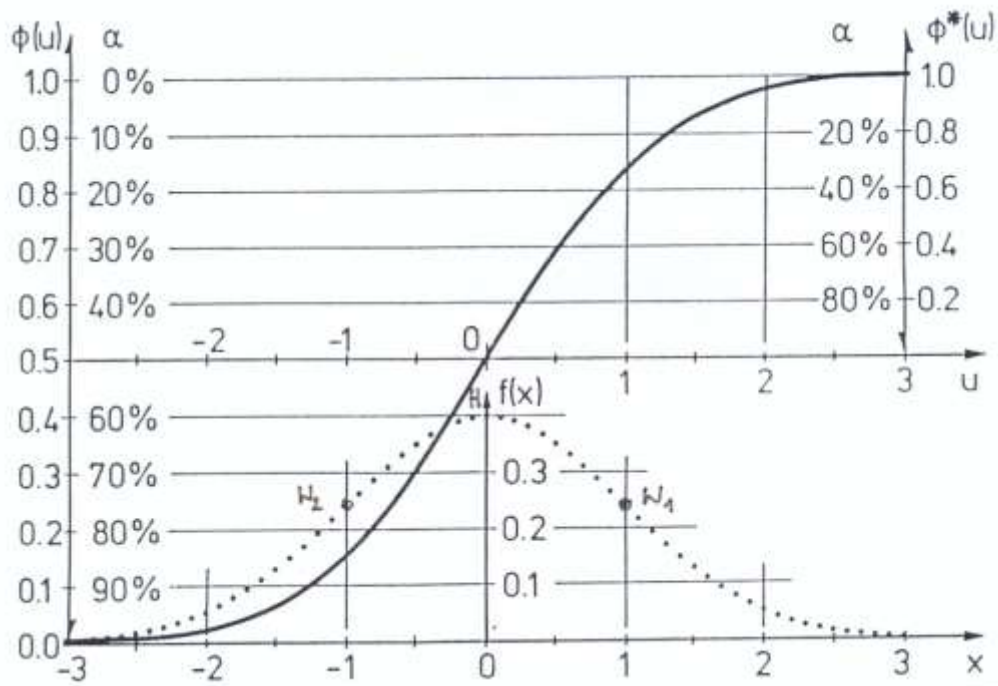
Das Integral kann nicht nach dem Hauptsatz berechnet werden, da zum Integranden keine elementare Stammfunktion existiert. Man ist deshalb auf numerische Verfahren angewiesen. Im Folgenden wird erläutert, dass die Tabelle zu $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ für alle Parameterwerte ausreicht.

Tabelliert ist:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Standardnormalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

$\Phi(u)$ entspricht dem Inhalt der von der Glockenkurve und der x-Achse im Intervall von $-\infty$ bis $u > 0$ begrenzten Fläche. Wegen $\Phi(\infty) = 1$ können die Werte von $\Phi(u)$ als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden, dass die standardnormalverteilte Zufallsvariable Z einen Wert zwischen $-\infty$ und $u > 0$ annimmt. Der abgebildete Graph von $\Phi(u)$ ermöglicht eine Abschätzung des Tabellenwerts zur Kontrolle.



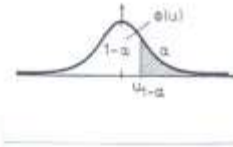
Heute macht schon der Taschenrechner oder eine Statistiksoftware (oder auch Excel) das Lesen von Tabellen und die Interpolation weitgehend überflüssig.

Die folgenden Ableseübungen können deshalb mit diesen Hilfsmitteln gelöst oder überlesen werden.

Tabelle der Normalverteilung

Verteilungsfunktion: $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-z^2/2} dz,$

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

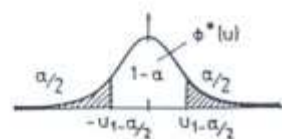


u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.4000	0.0800	0.1200	0.1600	0.1990	0.2390	0.2790	0.3190	0.3590
0.1	0.3980	0.4380	0.4780	0.5170	0.5570	0.5960	0.6360	0.6750	0.7140	0.7530
0.2	0.7930	0.8320	0.8710	0.9100	0.9480	0.9870	*0.0260	*0.0640	*0.1030	*0.1410
0.3	0.1790	0.2170	0.2550	0.2930	0.3310	0.3680	0.4060	0.4430	0.4800	0.5170
0.4	0.5540	0.5910	0.6280	0.6640	0.7000	0.7360	0.7720	0.8080	0.8440	0.8790
0.5	0.9150	0.9500	0.9850	*0.0190	*0.0540	*0.0880	*0.1230	*0.1570	*0.1900	*0.2240
0.6	0.2570	0.2910	0.3240	0.3570	0.3890	0.4220	0.4540	0.4860	0.5170	0.5490
0.7	0.5800	0.6110	0.6420	0.6730	0.7040	0.7340	0.7640	0.7940	0.8230	0.8520
0.8	0.8810	0.9100	0.9390	0.9670	0.9950	*0.0230	*0.0510	*0.0780	*0.1060	*0.1330
0.9	0.1590	0.1860	0.2120	0.2380	0.2640	0.2890	0.3150	0.3400	0.3650	0.3890
1.0	0.4130	0.4380	0.4610	0.4850	0.5080	0.5310	0.5540	0.5770	0.5990	0.6210
1.1	0.6430	0.6650	0.6860	0.7080	0.7290	0.7490	0.7700	0.7900	0.8100	0.8300
1.2	0.8490	0.8690	0.8880	0.9070	0.9250	0.9440	0.9620	0.9800	0.9970	*0.0150
1.3	0.0320	0.0490	0.0660	0.0820	0.0990	0.1150	0.1310	0.1470	0.1620	0.1770
1.4	0.1920	0.2070	0.2220	0.2360	0.2510	0.2650	0.2790	0.2920	0.3060	0.3190
1.5	0.3320	0.3450	0.3570	0.3700	0.3820	0.3940	0.4060	0.4180	0.4290	0.4410
1.6	0.4520	0.4630	0.4740	0.4840	0.4950	0.5050	0.5150	0.5250	0.5350	0.5450
1.7	0.5540	0.5640	0.5730	0.5820	0.5910	0.5990	0.6080	0.6160	0.6250	0.6330
1.8	0.6410	0.6490	0.6560	0.6640	0.6710	0.6780	0.6860	0.6930	0.6990	0.7060
1.9	0.7130	0.7190	0.7260	0.7320	0.7380	0.7440	0.7500	0.7560	0.7610	0.7670
2.0	0.9772	0.7780	0.8310	0.8820	0.9320	0.9820	*0.0300	*0.0770	*0.1240	*0.1690
2.1	0.9821	0.2570	0.3000	0.3410	0.3820	0.4220	0.4610	0.5000	0.5370	0.5740
2.2	0.6100	0.6450	0.6790	0.7130	0.7450	0.7780	0.8090	0.8400	0.8700	0.8990
2.3	0.9280	0.9560	0.9830	*0.0100	*0.0360	*0.0610	*0.0860	*0.1110	*0.1340	*0.1580
2.4	0.9918	0.2020	0.2240	0.2450	0.2660	0.2860	0.3050	0.3240	0.3430	0.3610
2.5	0.3790	0.3960	0.4130	0.4300	0.4460	0.4610	0.4770	0.4920	0.5060	0.5200
2.6	0.5340	0.5470	0.5600	0.5730	0.5850	0.5980	0.6090	0.6210	0.6320	0.6430
2.7	0.6530	0.6640	0.6740	0.6830	0.6930	0.7020	0.7110	0.7200	0.7280	0.7360
2.8	0.7440	0.7520	0.7600	0.7670	0.7740	0.7810	0.7880	0.7950	0.8010	0.8070
2.9	0.8130	0.8190	0.8250	0.8310	0.8360	0.8410	0.8460	0.8510	0.8560	0.8610
3.0	0.9998	0.6500	0.6940	0.7360	0.7770	0.8170	0.8560	0.8930	0.9300	0.9650
3.1	0.9999	0.0320	0.0650	0.0960	0.1260	0.1550	0.1840	0.2110	0.2380	0.2640
3.2	0.3130	0.3360	0.3590	0.3810	0.4020	0.4230	0.4430	0.4620	0.4810	0.4990
3.3	0.5170	0.5340	0.5500	0.5660	0.5810	0.5960	0.6100	0.6240	0.6380	0.6510
3.4	0.6630	0.6750	0.6870	0.6980	0.7090	0.7200	0.7300	0.7400	0.7490	0.7580
3.5	0.7670	0.7760	0.7840	0.7920	0.8000	0.8070	0.8150	0.8220	0.8280	0.8350
3.6	0.8410	0.8470	0.8530	0.8580	0.8640	0.8690	0.8740	0.8790	0.8830	0.8880
3.7	0.8920	0.8960	0.9000	0.9040	0.9080	0.9120	0.9150	0.9180	0.9220	0.9250
3.8	0.9280	0.9310	0.9330	0.9360	0.9380	0.9410	0.9430	0.9460	0.9480	0.9500
3.9	0.9520	0.9540	0.9560	0.9580	0.9590	0.9610	0.9630	0.9640	0.9660	0.9670

$$\Phi(1.96) \approx 0.975, \quad \Phi(-1.96) = 1 - \Phi(1.96) \approx 0.025$$

$$\Phi^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^{+u} e^{-z^2/2} dz$$

für $u \geq 0$ gilt $\Phi^*(u) = 2\Phi(u) - 1$



Einige Ableseübungen (optional):

1. u gegeben, $\Phi(u)$ gesucht

u	$\Phi(u)$
0.6	0.7257
0.61	0.7291
0.84	0.7995
0.85	0.8023

beachte die Bedeutung des Sterns *

u	$\Phi(u)$
1.160	0.8770
1.163	$0.8770 + 0.0006 = \mathbf{0.8776}$
1.170	0.8790

Werden die Veränderungen auf die letzte Stelle bezogen dann gilt:

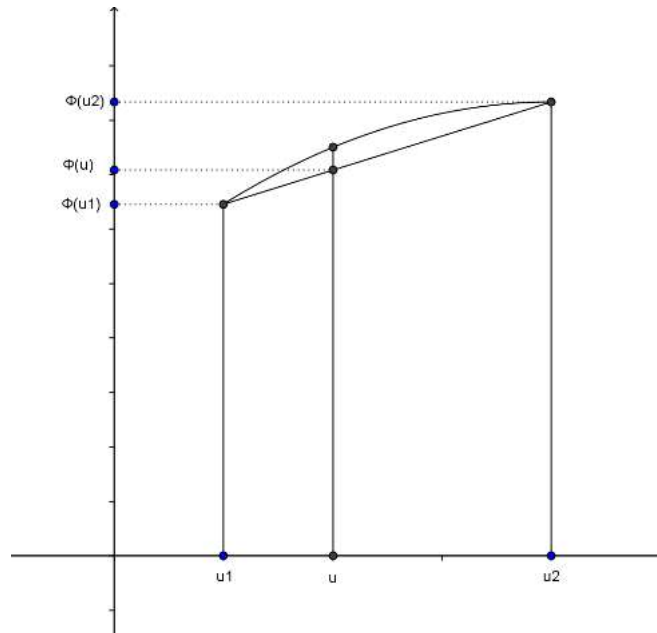
Nimmt u um 10 zu, so wächst $\Phi(u)$ um 20.

Nimmt u um 1 zu, so wächst $\Phi(u)$ um 2.

Nimmt u um 3 zu, so wächst $\Phi(u)$ um $3 \cdot 2 = 6$ zu.

u	$\Phi(u)$
1.100	0.8643
1.104	$0.8643 + 0.0009 = \mathbf{0.8652}$
1.110	0.8665

Nimmt u um 4 zu, so wächst $\Phi(u)$ um $4 \cdot 2.2 \approx 9$ zu.



2. $\Phi(u)$ gegeben, u gesucht

$\Phi(u)$	u
0.9394	1.55
0.9505	1.650
0.9510	$1.650 + 0.005 = \mathbf{1.655}$
0.9515	1.660

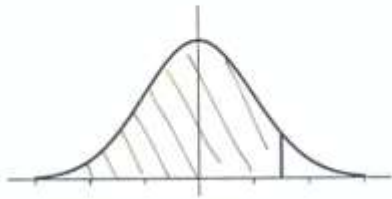
Nimmt $\Phi(u)$ um 10 zu, so wächst u um 10

Nimmt $\Phi(u)$ um 5 zu, so wächst u um 5

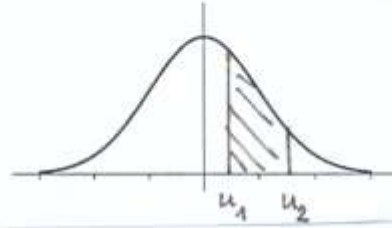
Weitere Beispiele:

$\Phi(u)$	u
0.9460	1.607
0.7969	0.8307
0.8778	1.164

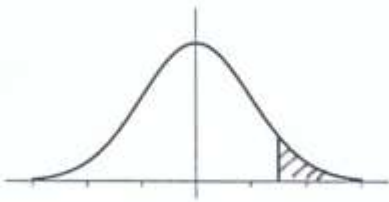
In den Anwendungen treten vor allem die folgenden Probleme auf:



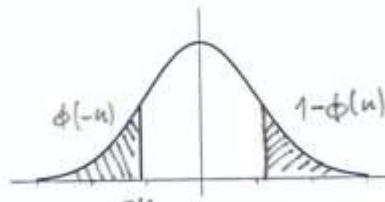
$$p(Z \leq u) = \Phi(u) \quad u > 0$$



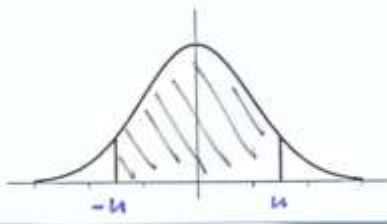
$$p(u_1 \leq Z \leq u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$$



$$p(Z \geq u) = 1 - \Phi(u)$$



$$p(Z \leq -u) = \Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$$



$$p(-u \leq Z \leq u) = \Phi(u) - \Phi(-u) = 2\Phi(u) - 1 = \Phi^*(u)$$

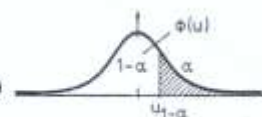
In der Statistik spielen die folgenden "Alarmwerte" eine wichtige Rolle:

$\Phi(u) = 0.95$ $u = 1.645$ ($\rightarrow$ einseitiger Test)

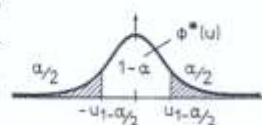
$\Phi(u) = 0.975$ $u = 1.96$ ($\rightarrow$ zweiseitiger Test)

Hilfstafel zum Testen

einseitig	$u_{1-\alpha}$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090
Signifikanzniveau α		10%	5%	2.5%	1%	0.5%	0.1%
$1 - \alpha$		90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.9%



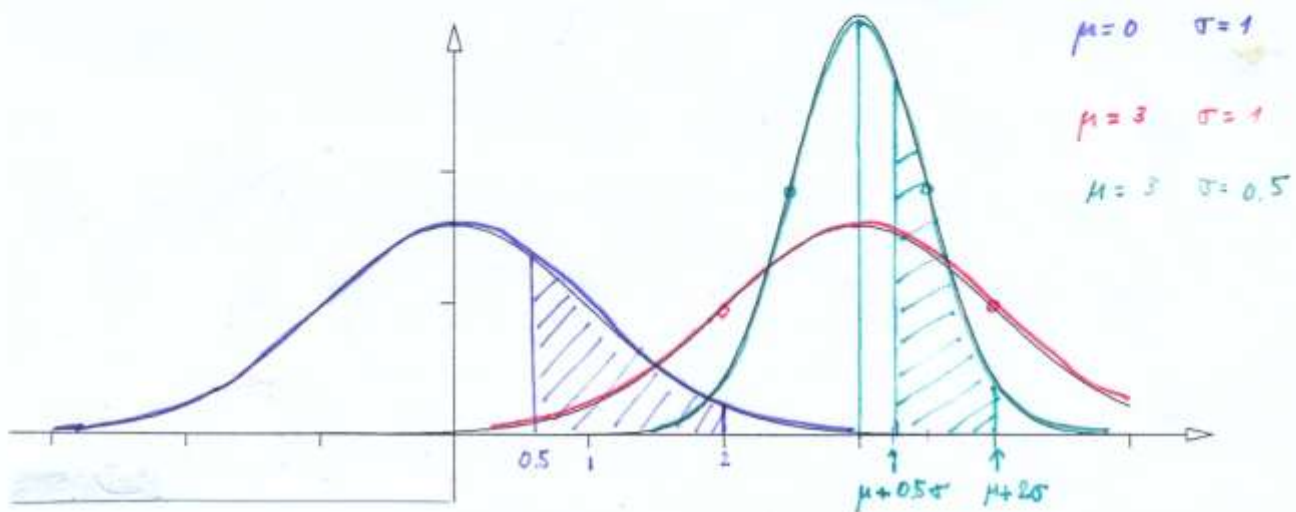
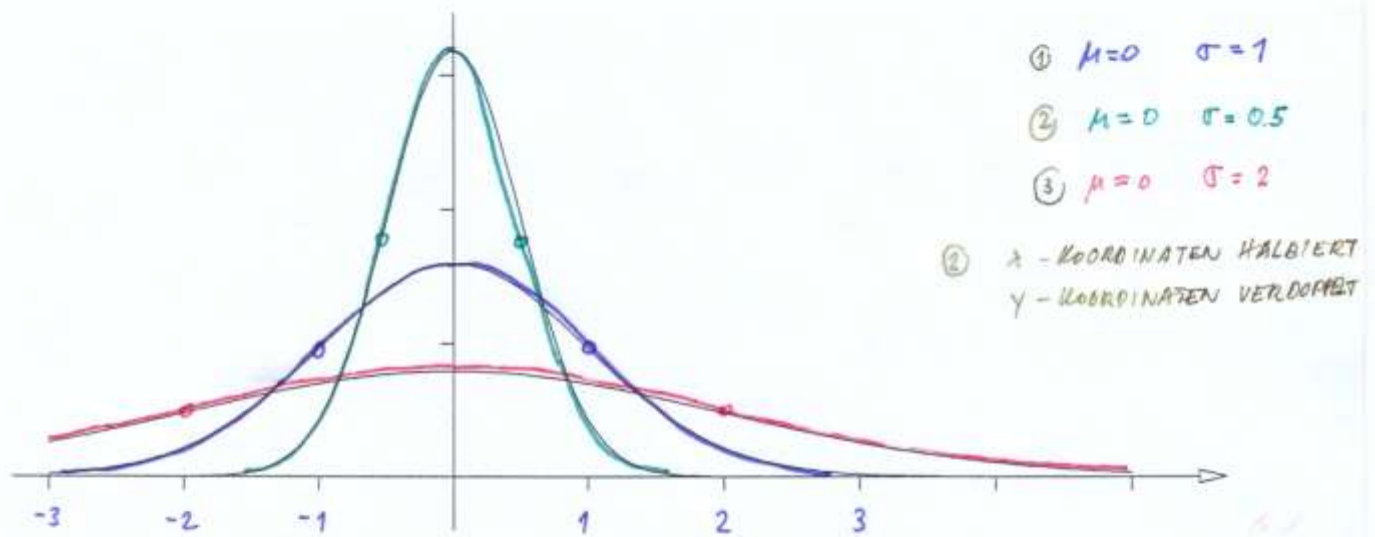
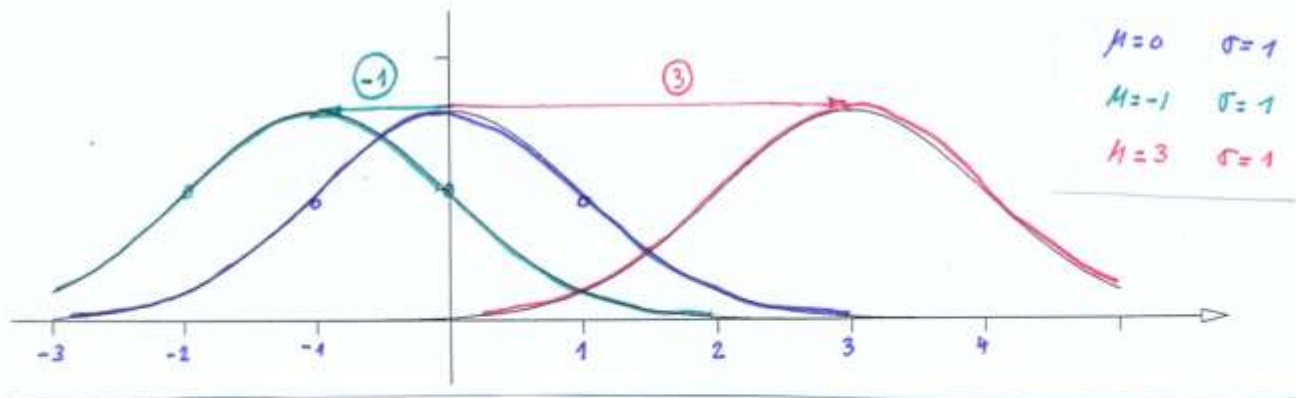
zweiseitig	$u_{1-\alpha/2}$	1.645	1.960	2.241	2.576	2.807	3.291
------------	------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------



Der allgemeine Fall einer (μ, σ) - normalverteilten Zufallsvariablen X mit der Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

kann auf den Spezialfall der Standardnormalverteilung zurückgeführt werden. Zur Vorbereitung untersuchen wir den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Gausskurven.



Die Beispiele zeigen, dass der Erwartungswert μ die Lage der Symmetrieachse verändert, die Standardabweichung σ die Lage der Wendepunkte. Wird σ verkleinert, so ergibt sich eine schlankere Kurve mit einem grossen Maximum, wird umgekehrt σ vergrössert, so ergibt sich eine flachere Gausskurve mit einem kleinen Maximum.

Das blau schraffierte Flächenstück kann durch eine flächentreue Abbildung in das rot schraffierte Flächenstück der Standardnormalverteilung übergeführt werden.

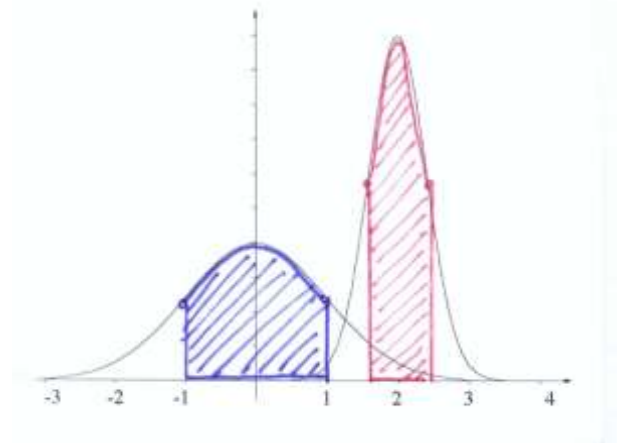
Wesentlich ist nun:

Misst man die Lage der oberen und unteren Grenze nicht absolut, sondern in Einheiten von σ , dann sind die zugehörigen Flächenstücke immer gleich gross (unabhängig von der speziellen Wahl von μ und σ). Die zugehörigen Inhalte können deshalb mit der Tabelle der Standardnormalverteilung bestimmt werden.

Skizze: $\mu = 0, \sigma = 1$ bzw. $\mu = 2, \sigma = 0.4$

Geometrisch:

Das rot gefärbte Gebiet kann durch eine flächentreue Abbildung in das blau gefärbte Gebiet unter der Standardnormalverteilung übergeführt werden.



Beweis: (Substitution 1.Art).

$$p(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{\sigma} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Damit gilt für die

Wahrscheinlichkeit, dass die normalverteilte Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ einen Wert zwischen a und b einnimmt:

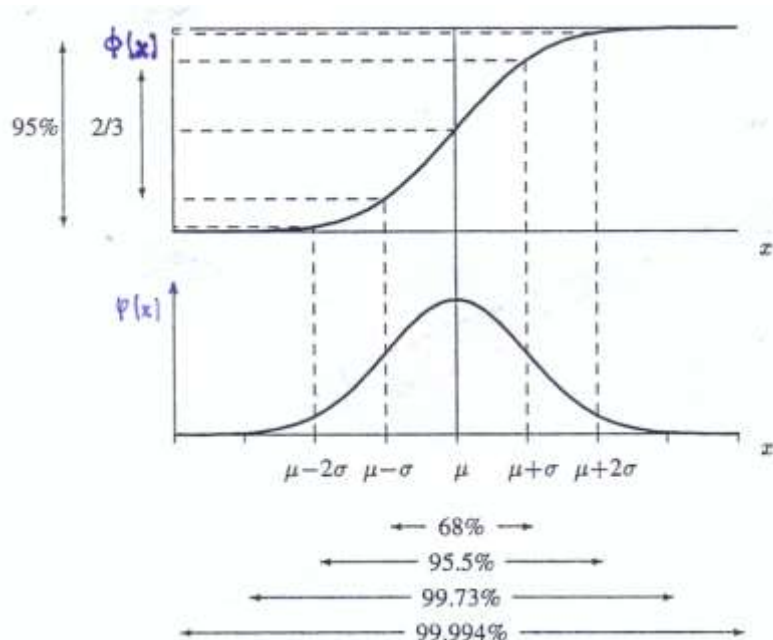
$$p(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Merkregel:

Es sind die Abweichungen vom Erwartungswert in Einheiten von σ zu messen.

In der folgenden Grafik sind einige häufig verwendete Werte zusammengestellt:

Intervall	Wahrscheinlichkeit	
$[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$	ca $\frac{2}{3}$	$\Phi^*(1) \approx 0.6826$
$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$	ca 95%	$\Phi^*(2) \approx 0.9545$
$[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$	ca. 100%	$\Phi^*(3) \approx 0.9973$



Aufgabe:

Der systolische Blutdruck X gesunder Menschen ist etwa normalverteilt mit dem Erwartungswert 120 und der Standardabweichung 10. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

- a)
dass der Blutdruck höchstens 105 beträgt:

$$P(X \leq 105) = \Phi\left(\frac{105-120}{10}\right) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668$$

- b)
dass der Blutdruck zwischen 110 und 130 liegt:

$$P(110 \leq X \leq 130) = \Phi^*\left(\frac{130-120}{10}\right) - \Phi^*\left(\frac{110-120}{10}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2 \cdot \Phi(1) - 1 = 0.6826$$

- c)
Ist ein Blutdruck von 135 schon alarmierend, d.h. liegt er ausserhalb des Bereichs $\mu \pm 2\sigma$?

Der Bereich $\mu \pm 2\sigma$ entspricht dem Intervall $[100, 140]$. Da 135 in diesem Intervall liegt, ist ein solcher Blutdruck nicht alarmierend

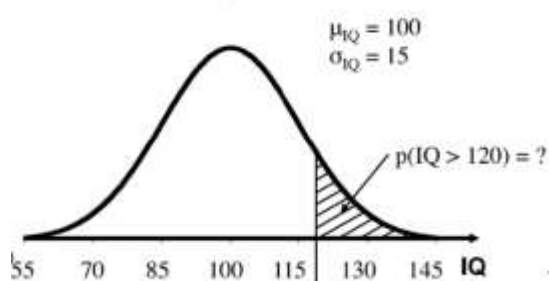
Aufgabe:

Die IQ-Skala geht von einem Erwartungswert $\mu_{IQ} = 100$ und von Standardabweichung $\sigma_{IQ} = 15$ aus.

a)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer normalverteilten Stichprobe eine Probandin einen IQ grösser als 120 hat

Der unteren Grenze 120 entspricht der standardisierte Wert z der Standardnormalverteilung



$$z = \frac{IQ - \mu_{IQ}}{\sigma_{IQ}} = \frac{120 - 100}{15} = 1.333 =$$

Damit erhält man

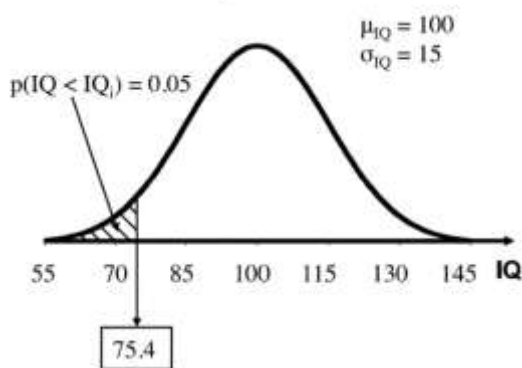
$$p(IQ > 120) = 1 - \Phi(1.333) = 0.092$$

Lösung in R:

`pnorm(q=120, mean=100, ..sd = 15, lower.tail = F)`

b)

Unter welchem IQ liegen 5% der IQ-Werte?



Gesucht ist zunächst der standardisierte Wert z für den gilt:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) = 0.05$$

Aus der Tabelle erhält man den Wert $z = -1.64$.

Wegen $z = \frac{IQ - \mu_{IQ}}{\sigma_{IQ}}$ gilt:

$$IQ = \mu_{IQ} - z \cdot \sigma_{IQ} = 100 - 1.64 \cdot 15 = 75.4$$

Lösung in R:

`qnorm(q=0.05, mean=100, ..sd = 15, lower.tail = T)`

Aufgabe:

X sei die (normalverteilte) Plattendicke eines Werkstücks in mm mit dem Erwartungswert $\mu = 10$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 0.02$ mm.

Wieviel Ausschuss ist in den folgenden Fällen zu erwarten:

a) wenn die minimale Dicke mindestens 9.97 mm betragen soll,

Abweichung absolut. -0.03 in σ -Einheiten. -1.5

$$p(X < 9.97) = p(Z < -1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 6.7\% \text{ Ausschuss}$$

b) wenn die Plattendicke maximal 0.03 mm vom Erwartungswert abweichen soll

Abweichung absolut. +/-0.03 in σ -Einheiten. +/-1.5

$$1 - p(9.97 < X < 10.03) = 1 - \Phi^*(1.5) = 13.4\% \text{ Ausschuss}$$

c) Wie sind die Toleranzgrenzen $[10 - c, 10 + c]$ zu wählen, damit höchstens 95% Ausschuss anfällt?

$$\Phi^*(u) = 0.95 \rightarrow \Phi(u) = 0.975 \rightarrow u = 1.96 \rightarrow c = u\sigma = 1.96 \cdot 0.02 \approx 0.04$$

Grenzen $[9.96, 10.04]$

Das Ergebnis in c) kann auch so formuliert werden:

Das Intervall $[9.96, 10.04]$ ist ein **95%-Vertrauensintervall für die Plattendicke**.

Summenverteilung

Der Grenzwertsatz ermöglicht es eine Aussage über die Summe von unabhängigen Zufallsvariablen von vergleichbarer Größenordnung zu machen.

Für den Erwartungswert bzw. der Varianz einer Summe von n unabhängigen Zufallsvariablen gilt bekanntlich:

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

Angenommen die X_i haben annähernd die gleiche (NV-) Verteilung mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2 dann gilt für genügend grosse n nach dem zentralen Grenzwertsatz

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\mu \quad (1)$$

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\sigma^2 \quad (2)$$

Als Beispiel:

Der Lift in einem Gebäude sei zugelassen für 12 Personen bzw. eine Maximalbelastung von 1000 kg. Es wird angenommen, dass die einzelnen Gewichte annähernd normalverteilt sind. Das Durchschnittsgewicht der Personen sei $\mu = 70$ kg und die Standardabweichung $\sigma = 15$ kg.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass der voll besetzte Lift die Maximallast überschreitet und der Lift stecken bleibt, gilt dann:

$$p\left(\sum_{i=1}^{12} X_i > 1000\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1000 - 12 \cdot 70}{15 \cdot \sqrt{12}}\right) = 0.001$$

Aus (1) und (2) erhält man für den

Erwartungswert des Mittelwerts:

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i = \mu \quad 1. \text{theoretisches Moment (3)}$$

und für die Varianz wegen $V(b \cdot X) = b^2 \cdot V(X)$

Standardfehler des Mittelwerts in der Grundgesamtheit (Population)

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Das Ergebnis bedeutet:

wird der Stichprobenumfang verdoppelt, so halbiert sich die Varianz.

Entsprechend nennt man:

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad 2. \text{theoretisches Moment (4)}$$

Wegen $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2$

kann die Varianz aus dem 1. und 2. Moment berechnet werden

Beispiel:

Die Eierproduktion von Hennen sei normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu = 310$ (Produktion einer Henne pro Jahr) und der Standardabweichung $\sigma = 40$.

Eine Bäuerin kauft 50 Hennen, die sie zufällig auswählt.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die **durchschnittliche Leistung** dieser Hennen grösser als 320 ist?

$$p(\bar{X} > 320) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{320 - 310}{40} \cdot \sqrt{50}\right) = 1 - 0.9616 \approx 3.8\%$$

Aufgabe:

Die Abfüllmaschine einer Firma stellt Joghurt her, deren Gewicht normalverteilt sei mit $\mu = 500.00 \text{ g}$ und $\sigma = 2.00 \text{ g}$. Eine Käuferin drei zufällig ausgewählte Joghurt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert grösser als 499.00 g beträgt?

$$p(\bar{X} > 499.00) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{499.00 - 500.00}{2.00} \cdot \sqrt{3}\right) = 1 - 0.866 \approx 0.134 \approx 13.4\%$$

Weitere Stetige Verteilungen werden in den folgenden Kapiteln vorkommen (Student-t-Verteilung, Chiquadratverteilung, F-Verteilung, ...)