

## 01 Diskrete Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert, Varianz

Bei Zufallsversuchen interessieren oft nicht die Ergebnisse selbst, sondern Zahlen, die den möglichen Ergebnissen des Zufallsversuchs zugeordnet sind. Dies führt auf den Begriff der Zufallsvariablen (engl.: random variable).

Beispiel 1:

Eine Münze wird dreimal geworfen. Das Werfen von Kopf sei ein Erfolg. Die Zufallsvariable  $X$  gibt an, wie oft Kopf auftritt.

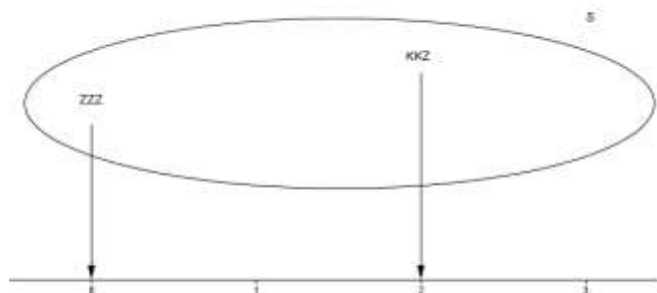
Modell:

Stichprobenraum

$S = \{KKK, KKZ, \dots, ZZZ\}$

Die Zufallsvariable  $X$  ordnet

z. B.  $KKZ \mapsto 2$  zu.



Definition:

Eine **diskrete Zufallsvariable**  $X$  ordnet jedem Ergebnis  $e_i$  eines Zufallsversuchs mit dem endlichen Stichprobenraum  $S$  eindeutig eine reelle Zahl  $x_i$  zu:

$$X: e_i \in S \mapsto x_i \in \mathbb{R}$$

Bemerkung:

Zufallsvariable sind also Funktionen. Die Funktionswerte können als Gewinne bei einem Glücksspiel aufgefasst werden. Zufallsvariable werden mit Grossbuchstaben z.B.  $X$ , die einzelnen Werte (Realisierungen der Zufallsvariable) mit  $x_1, x_2, \dots, x_i$  bezeichnet.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $X$  nur endlich viele Werte annehmen kann. In diesem Fall heisst  $X$  **diskrete Zufallsvariable**.

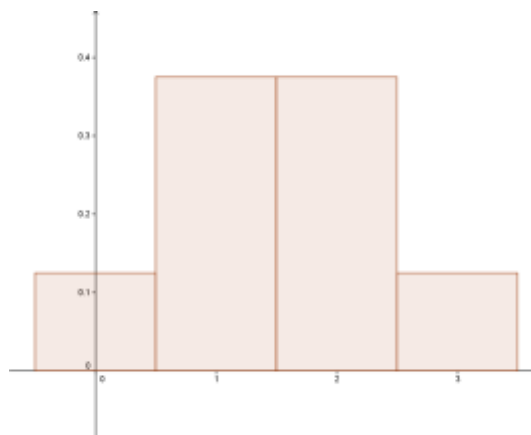
Die Werte der Zufallsvariablen treten mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten auf. Die zugehörige Funktion heisst **Wahrscheinlichkeitsverteilung**. Sie ordnet den Werten  $x_i$  der Zufallsvariablen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $p(x_i)$  zu, wobei  $\sum p(x_i) = 1$  gilt.

Im Münzenbeispiel:

Die Zufallsvariable  $X$  „Anzahl Erfolge“ kann die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die

Binomialverteilung:

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$



Die so genannte **Verteilungsfunktion** gibt für jeden Wert  $x_i$  die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable einen Wert annimmt, der höchstens so gross ist wie  $x$ .

Bei diskreten Zufallsvariablen entspricht dies der Summe der Wahrscheinlichkeiten  $x_i \leq x$ :

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Im Münzenbeispiel:

$X = x_i$	0	1	2	3
$F(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

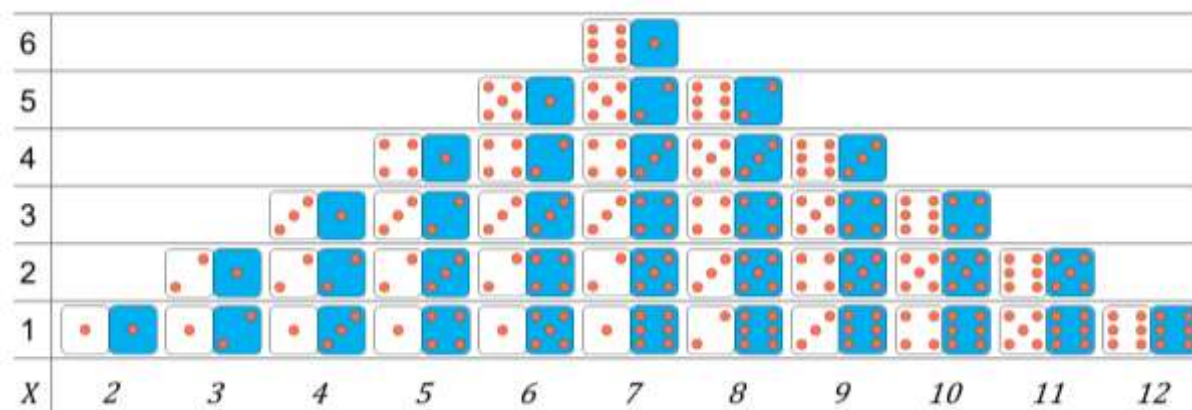
Beispiel 2:

Werfen eines Laplace-Würfels:

Die Zufallsvariable  $X$  „Augenzahl“ kann die Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit den Wahrscheinlichkeiten  $p(x_i) = \frac{1}{6}$  annehmen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die **Gleichverteilung**.

## Beispiel 3:

Augensumme von zwei Würfeln:



Die Zufallsvariable X „Augensumme“ kann die Werte 2, 3, 4, 5, ..., 12 mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten annehmen:

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Mit der Idee der **erzeugenden Polynome** können die absoluten Häufigkeiten für die Augensumme rechnerisch bestimmt werden.

Dazu ermittelt man die Koeffizienten des Polynoms  $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$

Als Koeffizient von  $x^8$  z.B. ergibt sich 5, womit die Augensumme 8 genau fünfmal auftreten kann, nämlich bei den Ergebnissen (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), 6, 2).

## Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Analog zu den empirischen Häufigkeitsverteilungen charakterisieren wir Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch Masszahlen, sogenannte Parameter:

Der **Erwartungswert** ist das Gegenstück zum empirischen Mittelwert und die **Varianz** bzw. **Standardabweichung** das Gegenstück zur empirischen Varianz bzw. Standardabweichung.

Dabei treten im Modell an die Stelle der relativen Häufigkeiten  $\frac{n_i}{n}$  die Wahrscheinlichkeiten  $p(x_i)$ .

Definition:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i) \quad \text{Erwartungswert einer Zufallsvariablen}$$

Bemerkung:

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen kann als mittlerer Gewinn beim Glückspiel auf lange Sicht aufgefasst werden.

Im Beispiel 1 (Münzenwurf) erhält man

$$\mu = E(X) = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Der Erwartungswert allein beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung nur unvollständig. Zwei Verteilungen mit gleichem Erwartungswert können unterschiedlich um den Erwartungswert streuen. Als Mass für die mittlere Abweichung der Werte der Zufallsvariablen vom Erwartungswert definieren wir die Varianz  $V(X)$  bzw. die Standardabweichung  $\sigma$ .

$$V(x) = \sum_{i=1}^n p(x_i) \cdot (x_i - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = V(x) \quad \sigma \geq 0 \quad V(X) \text{ Varianz, } \sigma \text{ heisst Standardabweichung.}$$

Bemerkung:

Die Abweichungsquadrate vom Erwartungswert werden mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtet.

Münzenbeispiel 1

$$\mu = E(X) = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{8} \cdot \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0.866$$

Übungsaufgabe:

Gesucht sind für die Zufallsvariable X der Erwartungswert und die Varianz:

a)		b)	
$x_i$	2      3      11	$x_i$	6      8      9      10
$p(x_i)$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$	$p(x_i)$	0.4    0.1    0.2    0.3

Lösung:

a)  $E(X) = 4, V(X) = 10$

b)  $E(X) = 8, V(X) = 3$

**Gesetze für den Erwartungswert und die Varianz:**

(1)  $E(k \cdot X) = k \cdot E(X) \quad k \in \mathbb{R}$

(2)  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$  und als Spezialfall:  $E(X + k) = E(X) + k \quad k \in \mathbb{R}$

(3)  $V(k \cdot X) = k^2 \cdot V(X) \quad V(X + k) = V(X)$

(4)  $V(X \pm Y) = V(X) \pm V(Y)$

Der wichtige **Verschiebungssatz**

(5)  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \mu^2$

Beweis von (5):

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E((X - \mu)^2) = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \stackrel{1,2}{=} E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

Illustration von 5) am Münzenbeispiel 1

$X:$	0	1	2	2
$X^2:$	0	1	4	9
$p(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X^2) = \frac{1}{8} \cdot 0^2 + \frac{1}{8} \cdot 1^2 + \frac{1}{8} \cdot 2^2 + \frac{1}{8} \cdot 3^2 = 3$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Zurück zum Beispiel 3) Augensumme  $S$  zweier Laplacewürfel:

Gesucht sind der Erwartungswert und die Varianz der Augensumme  $S$

a)

Lösung nach Definition (grosser Rechenaufwand):

Erwartungswert und Standardabweichung der Augensumme  $S$ :

$S = s_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(S) = \mu = \frac{1}{36} \cdot (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \dots + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1) = 7$$

$$\begin{aligned} V(S) = \sigma^2 &= \frac{1}{36} (2 - 7)^2 + \frac{2}{36} (3 - 7)^2 + \dots + \frac{2}{36} \cdot (11 - 7)^2 + \frac{1}{36} (12 - 7)^2 \\ &= \frac{210}{36} = \frac{35}{6} \end{aligned}$$

b)

Sei  $X$  die Augenzahl des ersten Würfels und  $Y$  die des zweiten. Dann kann die Varianz von  $X$  und  $Y$  mit dem **Verschiebungssatz 5)** berechnet werden.

$$V(X) = V(Y) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

c)

Die Berechnung von Erwartungswert und Varianz für die Augensumme  $S = X + Y$  kann nun mit den Eigenschaften 1) - 4) auf den Fall eines Würfels zurückgeführt werden.

$$E(X) = E(Y) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = E(Y) = \frac{7}{2}$$

und

$$V(X) = V(Y) = \frac{35}{12}$$

gilt:

$$E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7 \quad \text{Eigenschaft 2)}$$

$$V(S) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6} \quad \sigma = \sqrt{\frac{35}{6}} \quad \text{Eigenschaft 4)}$$

Die folgende Gegenüberstellung zwischen den empirischen und theoretischen Werten ist wichtig:

**empirisch:** rel. Häufigkeit  $h(x_i)$       emp. Mittelwert  $\bar{x}$       empirische Varianz  $s^2$   
**Modell:**      Wahrscheinlichkeit  $p(x_i)$       Erwartungswert  $E(X) = \mu$       Varianz  $V(X) = \sigma^2$

Im folgenden Beispiel werden die in einem Klassenversuch ermittelten Daten mit den entsprechenden Werten des Modells verglichen. Die angewandte Statistik lehrt, wie man Schätzwerte für die i.a. unbekannt Parameter z.B. Erwartungswert, Varianz schätzen kann.

Zufallsexperiment Werfen von 3 Münzen				Apr 97
Anzahl Kopf	abs. H ni	rel. H. hi		Wahrsch. p(xi)
0	27	0.129		0.125
1	73	0.348		0.375
2	83	0.395		0.375
3	27	0.129		0.125
Summe	210	1.000		1.000
<b>Mittelwert</b>	empirisch	<b>1.524</b>	<b>Erwart.wert</b>	<b>1.500</b>
<b>Varianz</b>	empirisch	<b>0.767</b>	Modell	<b>0.750</b>
Stand.abw.	empirisch	<b>0.876</b>	Modell	<b>0.866</b>

Die Bedeutung von Erwartungswert und Standardabweichung liegt darin, dass für viele Wahrscheinlichkeitsverteilungen (insbesondere für die später erwähnte Normalverteilung) gilt:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 66.7\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 94.4\%$$

Das heisst, dass in den angegebenen Intervallen etwa  $\frac{2}{3}$  bzw. 95% aller Werte der Zufallsvariablen liegen.  $3\sigma$ -Abweichungen vom Erwartungswert kommen praktisch nicht vor.

Diese Aussage gilt nicht nur im Modell, sondern in vielen Fällen auch für die in der angewandten Statistik erfassten Daten.