

Trigonometrie 1

1. Einleitung, Definition

Die Trigonometrie behandelt das Problem der Berechnung von Dreiecken. Es bestehen schöne Anwendungen in der Vermessung oder Astronomie.

Einführende Aufgabe:

In einem beliebigen rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel $\alpha = 55^\circ$ sind die Längen von Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse zu messen. Mit dem Taschenrechner sind die Näherungswerte der folgendermassen definierten Seitenverhältnisse zu berechnen:

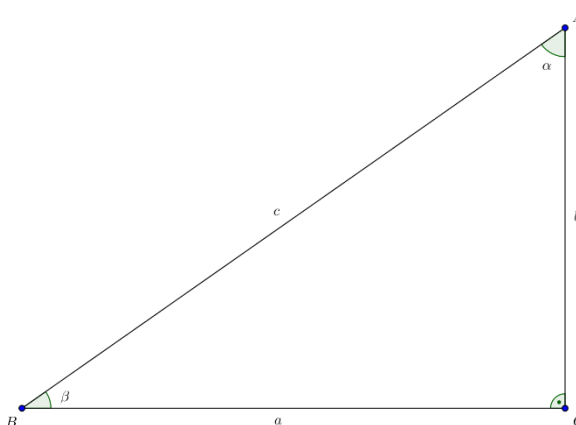
Definition:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{G}{H}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{A}{H}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{G}{A}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{A}{G}$$



Schülerinnen schlagen für die Definition folgende Merkregel vor:

sin	cos	tan	cot
G	A	G	A
H	H	A	G

Für die Seitenverhältnisse im Beispiel erhält man folgende Näherungswerte:

$$\sin 55^\circ \approx 0.82 \quad \cos 55^\circ \approx 0.57 \quad \tan 55^\circ \approx 1.43 \quad \cot 55^\circ \approx 0.70$$

Bemerkungen:

Da alle rechtwinkligen Dreiecke mit dem Winkel α zueinander ähnlich sind, sind die Werte der Seitenverhältnisse von der speziellen Wahl des Dreiecks unabhängig. Die Werte der Seitenverhältnisse hängen damit nur vom Winkel ab, sind eine Funktion des Winkels α .

Zur Herkunft des Wortes Sinus:

Sehne heisst indisch jiva. Es wurde von den Arabern als Fremdwort übernommen. Da es ähnlich tönt wie das arabische Wort für Ein-, Ausbuchtung führte dies zur falschen Übersetzung ins Lateinische.

Ist umgekehrt ein Seitenverhältnis gegeben, so bestimmt dies den Winkel α und damit auch die übrigen Seitenverhältnisse eindeutig.

Aufgabe:

Es ist ein rechtwinkliges Dreieck mit Winkel α so zu zeichnen, dass gilt: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Welche Werte ergeben sich daraus ohne Taschenrechner für die übrigen Funktionen?

Wählt man z.B. die Gegenkathete $a = 8$ und die Hypotenuse $c = 10$, so erhält man für die Ankathete nach Pythagoras $b = 6$. Damit können die übrigen Funktionswerte angegeben werden:

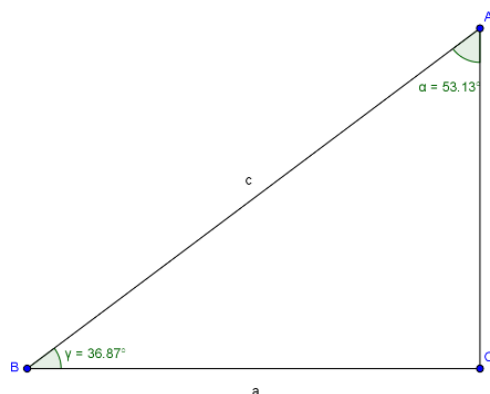
$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \tan \alpha = \frac{4}{3}, \cot \alpha = \frac{3}{4}.$$

Übungsaufgabe (ohne Taschenrechner):

gegeben: $\tan \alpha = \sqrt{8}$

gesucht: $\cos \alpha$

Lösung: $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.



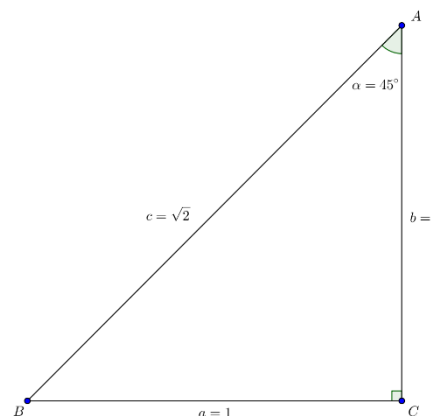
2. spezielle Winkel

Die trigonometrischen Funktionswerte sind i.a. irrationale Zahlen, für die der Taschenrechner Näherungswerte liefert. Wie die folgenden Beispiele zeigen, können in einigen Fällen genaue Werte angegeben werden.

a) $\alpha = 45^\circ$

Es kann die Hälfte eines Einheitsquadrats betrachtet werden.

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$



b) $\alpha = 30^\circ$ bzw. 60°

Es kann die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite 2 und der Höhe $\sqrt{3}$ betrachtet werden

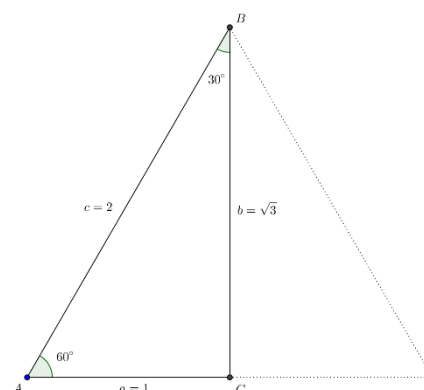
$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

Die Funktionswerte wachsen nicht linear:

Eselleiter:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$



3. Folgerung aus der Definition

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\text{z.B. } \sin 30^\circ = \cos 60^\circ$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\text{z.B. } \cos 30^\circ = \sin 60^\circ$$

$$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha).$$

$$\text{z.B. } \tan 20^\circ = \cot 70^\circ$$

$$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$$

$$\text{z.B. } \cot 40^\circ = \tan 50^\circ$$

4. Darstellung der trigonometrischen Funktionswerte am Einheitskreis

Die trigonometrischen Funktionswerte erscheinen als Masszahlen der farbig bezeichneten Strecken. Wählt man $\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OE} = 1$ dann gilt:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \overline{AB} = y$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \overline{OA} = x$$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \overline{CD} \quad \alpha \neq 90^\circ$$

$$\cot \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{OE}} = \overline{EF} \quad \alpha \neq 0^\circ$$

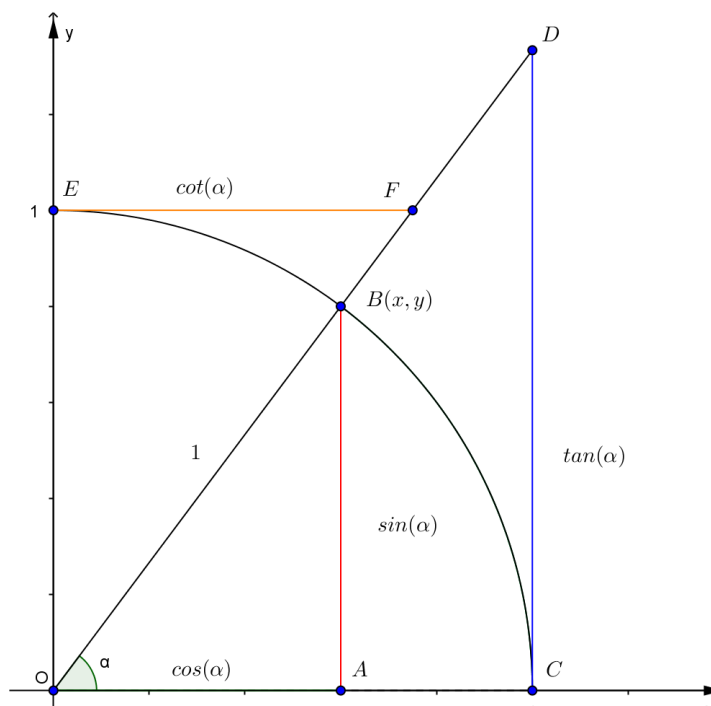
Wächst α von 0° bis 90°

- so wächst $\sin \alpha$ von 0 bis 1

- so fällt $\cos \alpha$ von 1 bis 0

- so wächst $\tan \alpha$ von 0 bis ∞ ,
d.h. nähert sich der Winkel 90° ,
so wird $\tan \alpha$ grösser als jede
noch so grosse positive Zahl

- so fällt $\cot \alpha$ von ∞ bis 0.



Insbesondere bedeutet eine Verdopplung des Winkels nicht eine Verdopplung des Funktionswerts, d.h. $\sin(2\alpha) \neq 2 \cdot \sin \alpha$.

5. Grundlegende Beziehungen

Aus der Abbildung ergeben sich die folgenden grundlegenden Beziehungen:

Pythagoras im Dreieck OAP:

$$(1) \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$(2) \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$(3) \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

Bemerkungen:

$$\cos^2 \alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha = (\cos \alpha)^2$$

Mit (1) kann $\cos \alpha$ in $\sin \alpha$ ausgedrückt werden:

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

bzw. umgekehrt $\sin \alpha$ in $\cos \alpha$:

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

Die Beziehungen gelten für beliebige zulässige Winkel, d.h. α kann z.B. ersetzt werden durch 2β oder $\frac{\gamma}{2}$.

Bei den folgenden Beispielen ergeben sich die Lösungen mit den folgenden Ideen:

- Grundlegende Beziehungen anwenden
- Terme auf einen gemeinsamen Bruchstrich bringen
- ausklammern, faktorisieren

Vereinfachen von Termen:

a)

$$\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \tan \alpha = \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{\cos \alpha}$$

b)

$$\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{s^4 - c^4}{s^2 - c^2} = \frac{(s^2 - c^2) \cdot (s^2 + c^2)}{s^2 - c^2} = s^2 + c^2 = 1, \text{ wobei } s = \sin \alpha \quad \text{bzw. } c = \cos \alpha$$

Beweise von Identitäten:

$$\text{a) } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \qquad \text{b) } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Es ist zu zeigen, dass für jeden zulässigen Winkel linke und rechte Seite übereinstimmen. Zeige, dass sich z.B. die linke (kompliziertere Seite) in die rechte Seite überführen lässt.

$$\text{a) } L = 1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = R \qquad \text{b) analog}$$

Übungsaufgabe:

Die folgenden Identitäten sind zu beweisen:

$$\text{a) } \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \tan \alpha \qquad \text{b) } \frac{2 \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = 2$$

6. Bestimmung der trigonometrischen Funktionswerte mit der TR

a)

Winkel gegeben, Funktionswert gesucht

Winkel im Gradmass (DEG! nicht GRAD!)

Beispiele:

$$\alpha = 25^\circ \quad \sin 25^\circ \approx 0.4226 \quad \cos 25^\circ \approx 0.9063$$

$$\tan 25^\circ \approx 0.4663 \quad \cot 25^\circ \approx 2.1445 \text{ (Kehrwertfunktion)}$$

Winkel im Bogenmass (RAD)

Beispiele:

$$\alpha = 1.309 \quad \sin 1.309 \approx 0.9659 \quad \cos 1.309 \approx 0.2588$$

$$\tan 1.309 \approx 3.7321 \quad \cot 1.309 \approx 0.2679$$

Test mit $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$ bzw. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

b) Funktionswert gegeben, Winkel gesucht

Die Umkehrfunktion des Sinus heisst Arcussinus. Sie gibt zu einem bestimmten Sinuswert den zugehörigen spitzen Winkel an (Bogen heisst auf lateinisch arcus).

Beispiele zum Gradmass:

$$\sin \alpha = 0.8 \quad \alpha = \arcsin(0.8) = \sin^{-1}(0.8) \approx 23.6^\circ$$

$$\cos \alpha = 0.4 \quad \alpha = \arccos(0.4) = \cos^{-1}(0.4) \approx 66.4^\circ$$

$$\tan \alpha = 2 \quad \alpha = \arctan(2) = \tan^{-1} 2 \approx 63.4^\circ$$

$$\cot \alpha = 4 \quad \text{zunächst kann mit der Kehrwertfunktion } \tan \alpha = \frac{1}{4} \text{ berechnet werden.}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 14.0^\circ$$

Beispiele zum Bogenmass:

$$\sin \alpha = 0.8 \quad \alpha = \arcsin(0.8) = \sin^{-1}(0.8) \approx 0.9273$$

$$\cos \alpha = 0.4 \quad \alpha = \arccos(0.4) = 1.1593$$

$$\tan \alpha = 2 \quad \alpha = \arctan(2) = \tan^{-1} 2 \approx 1.1071$$

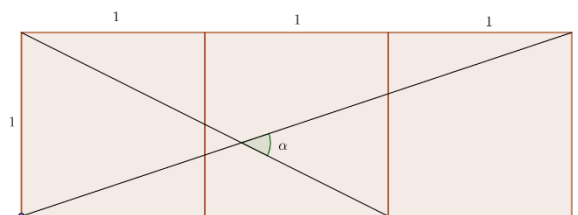
$$\cot \alpha = 4 \quad \alpha = \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0.245$$

Exkurs:

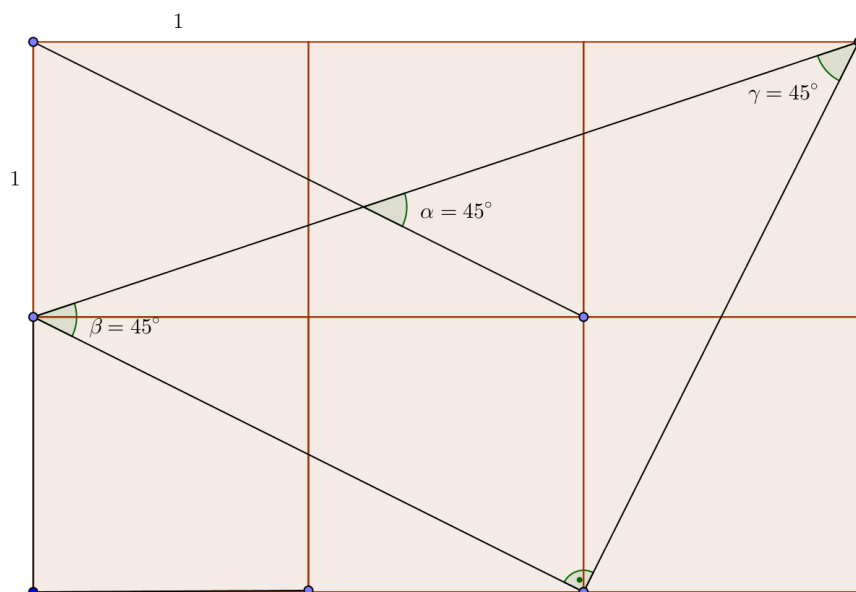
Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = 180^\circ$$

Zum Beweis ist die nebenstehende Abbildung mit drei Quadraten geeignet zu ergänzen...



Lösung



7. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks

Eine Winkelfunktion verknüpft einen Winkel und zwei Seiten. Sind in einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten oder eine Seite und ein spitzer Winkel gegeben, dann können die übrigen Größen berechnet werden.

Grundaufgabe 1:

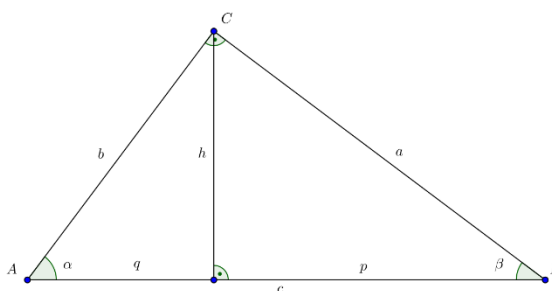
Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus einem Winkel und der Hypotenuse.

Gegeben: c , α

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

$$b = c \cdot \cos \alpha$$



numerische Beispiele:

$$\alpha = 29.6^\circ, c = 23.9$$

$$\beta \approx 60.4^\circ$$

$$a \approx 11.8$$

$$b \approx 20.8$$

$$\alpha = 19.4^\circ, c = 7.63$$

$$\beta \approx 70.6^\circ$$

$$a \approx 2.54$$

$$b \approx 7.20$$

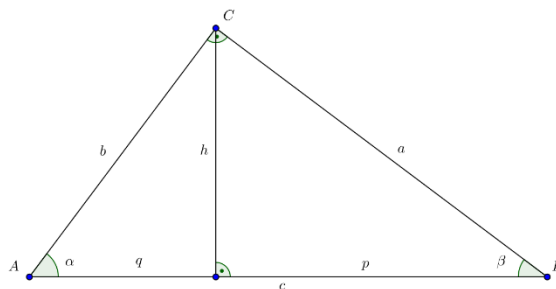
Grundaufgabe 2:
Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus einem Winkel und einer Kathete

Gegeben: a, β

$$\alpha = 90^\circ - \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \quad c = \frac{a}{\cos \beta}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a} \quad b = a \cdot \tan \beta$$



numerisches Beispiel:

$$a = 31.7 \quad \beta = 58.0^\circ \quad \alpha \approx 32.0^\circ \quad c \approx 59.8 \quad b \approx 50.7$$

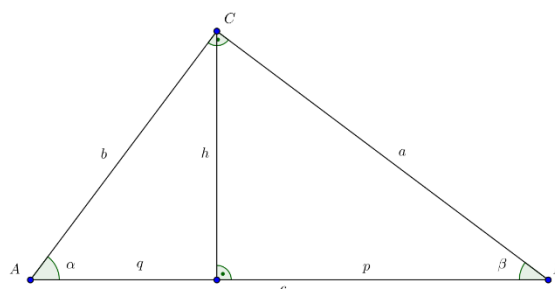
Grundaufgabe 3:
Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Hypotenuse und einer Kathete

Gegeben: c, b

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \quad \beta = \arcsin\left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \quad a = c \cos \beta$$



numerisches Beispiel:

$$c = 13.6, b = 8.95 \quad \beta \approx 41.2^\circ \quad \alpha \approx 48.8^\circ \quad a \approx 10.24$$

Grundaufgabe 4:
Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus den Katheten

Gegeben: a, b

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

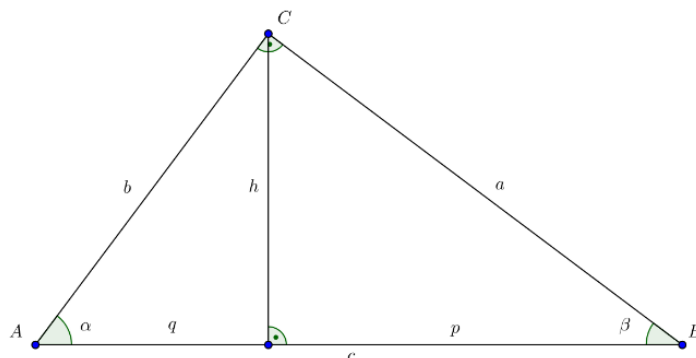
$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad c = \frac{a}{\sin \alpha}$$

Höhe h: $h = b \cdot \sin \alpha$

Hypotenusen abschnitte:

$$p = a \cdot \cos \beta \quad q = b \cdot \cos \alpha$$



numerisches Beispiel:

$$a = 3.17, b = 5.08 \quad \alpha \approx 32.0^\circ \quad \beta \approx 58.0^\circ \quad c \approx 5.99$$

Aufgabe:

Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Kathete a und die Hypotenuse c gegeben.

Gesucht sind a) die Höhe h_c b) die Winkelhalbierende w_α c) die Seitenhalbierende s_b .

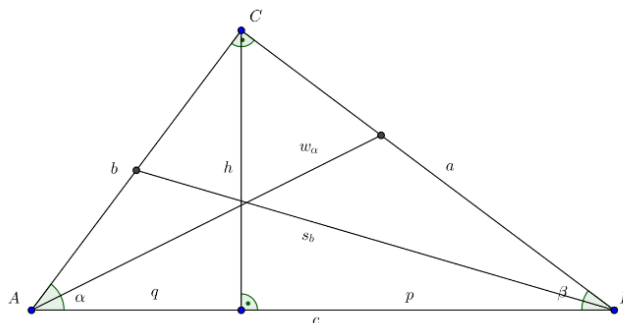
Lösung:

a) $\beta = \arccos\left(\frac{a}{c}\right) \quad h = a \cdot \sin \beta$

b) $\alpha = 90^\circ - \beta \quad b = c \cdot \cos \alpha \quad w_\alpha = \frac{b}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

c) $\tan \varepsilon = \frac{b}{2a} \quad \varepsilon = \arctan\left(\frac{b}{2a}\right)$

$\cos \varepsilon = \frac{a}{s_b} \quad s_b = \frac{a}{\cos \varepsilon}$



Übungsaufgaben:

a)

Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Hypotenuse $c = 74.00$ und die Kathete $a = 24.00$. Welche Länge hat die Winkelhalbierende w_α .

Lösung: $w_\alpha \approx 70.97$

b)

Die Fahrt mit der Seilbahn von der Talstation A zur Bergstation B dauert 16 Minuten. Die mittlere Geschwindigkeit der Kabine beträgt 2 Meter pro Sekunde. Wir nehmen an, dass sich die Kabine längs einer Geraden bewegt, die mit der Horizontalen einen Winkel von 25° bildet.

Wie hoch liegt die Bergstation B über der Talstation A?

Lösung: $h \approx 811$ m

8. Berechnung von gleichschenkligen Dreiecken, Trapezen, regulären Vielecken

Gleichschenklige Dreiecke, Rechtecke, Rhomben, usw. können berechnet werden, indem man geeignete rechtwinklige Teildreiecke betrachtet.

Aufgabe:

Berechnung eines gleichschenkligen Dreiecks aus der Basis c und der Höhe h_a .

$$\sin \beta = \frac{h_a}{c} \quad \beta = \alpha = \arcsin\left(\frac{h_a}{c}\right)$$

$$\gamma = 180^\circ - 2\beta$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{1}{2}c}{a} = \frac{c}{2a} \quad a = b = \frac{c}{2 \cos \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{h_c}{a} \quad h_c = a \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}c \cdot \tan \beta$$

numerisches Beispiel:

$$c = 86.4, h_a = 78.5$$

$$\alpha = \beta \approx 65.3^\circ \quad \gamma \approx 49.4^\circ$$

$$a = b \approx 103.4 \quad h_c \approx 94.0.$$

Übungsaufgabe:

Welchen Radius hat der Inkreis?

$$\text{Lösung: } \rho = \frac{1}{2}c \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Aufgabe:

Im gleichseitigen Dreieck ABC mit der Seite $a = 6$ wird die Seite AB durch die Teilpunkte T_1 und T_2 in drei gleiche Teile zerlegt.

Welchen Winkel schliessen die Geraden CT_1 und CT_2 ein?

$$\text{Pythagoras: } h = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad \varphi = 2 \arctan\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \approx 21.8^\circ$$

$$\varepsilon = 30^\circ - \frac{1}{2}\varphi \approx 19.1^\circ$$

Übungsaufgaben:

a)

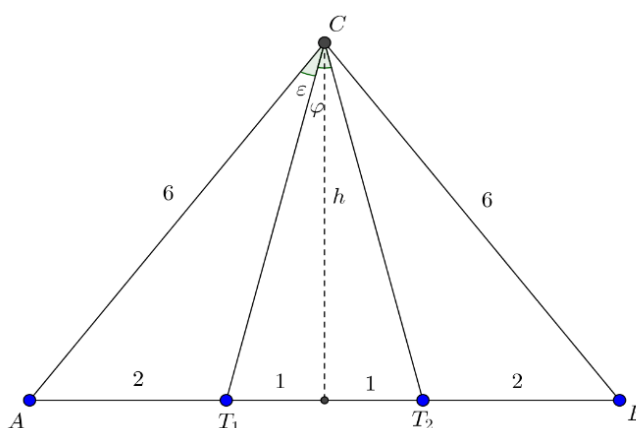
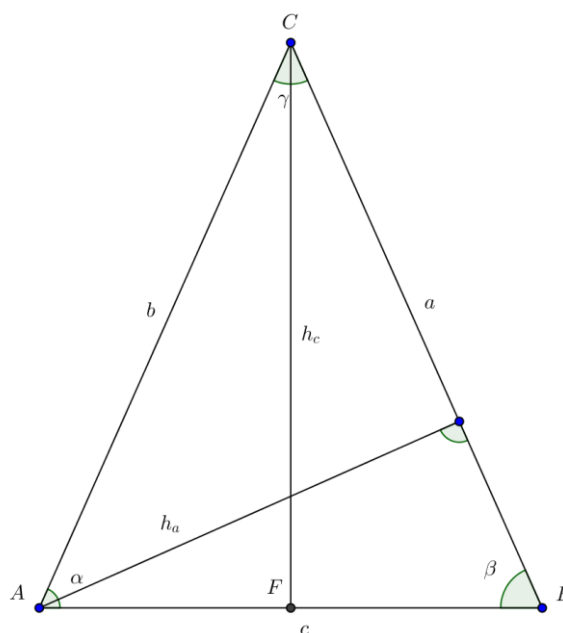
Welchen spitzen Winkel schliessen in einem Rechteck mit den Seiten $a = 28$ und $b = 45$ die Diagonalen ein?

Lösung: 63.78°

b)

Wie gross sind die Innenwinkel eines Rhombus mit den Diagonalen $e = 171.6$ und $f = 245.1$

Lösung: $110.0^\circ, 70.0^\circ$.



Aufgabe:

Berechnung eines gleichschenkligen Trapezes aus a , h und α .

Gegeben: $a, h, \alpha = \beta$

Gesucht: $b = d, c$, Diagonale $e = f$

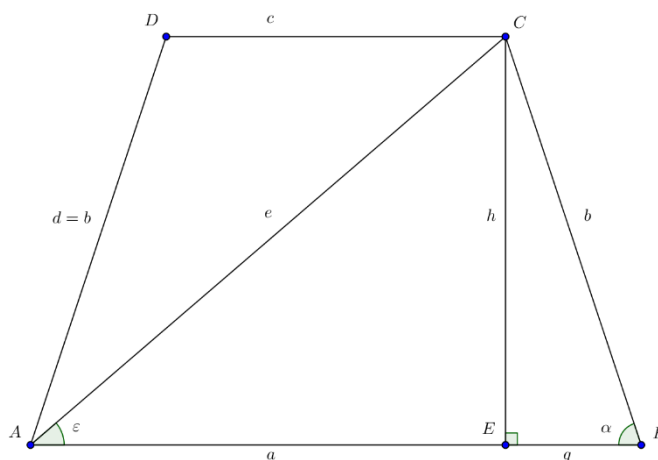
$$g = \overline{EB}$$

$$\frac{h}{b} = \sin \alpha \quad b = \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$g = h \cdot \cot \alpha$$

$$c = a - 2g = a - 2h \cdot \cot \alpha$$

$$m = \frac{a+b}{2}$$



Bestimmung der Diagonalen nach Pythagoras.

Variante: Hilfswinkel ε :

$$\tan \varepsilon = \frac{h}{a-g} \quad \varepsilon = \arctan \left(\frac{h}{a-g} \right) \quad \frac{h}{e} = \sin \varepsilon \quad e = f = \frac{h}{\sin \varepsilon}$$

Numerisches Beispiel:

$$a = 54.6, h = 9.86, \alpha = 65.5^\circ$$

$$b = 10.8, c = 45.6, e = 11.1$$

Kann keine direkte Beziehung zwischen bekannten Grössen und der gesuchten Grösse aufgestellt werden, so führe man eine Hilfsvariable ein.

Eine einfache Vermessungsaufgabe:

Welche Höhe h hat ein Turm, dessen Fusspunkt unzugänglich ist?

gegeben: α, β, s Hilfsvariable $\overline{BF} = x$

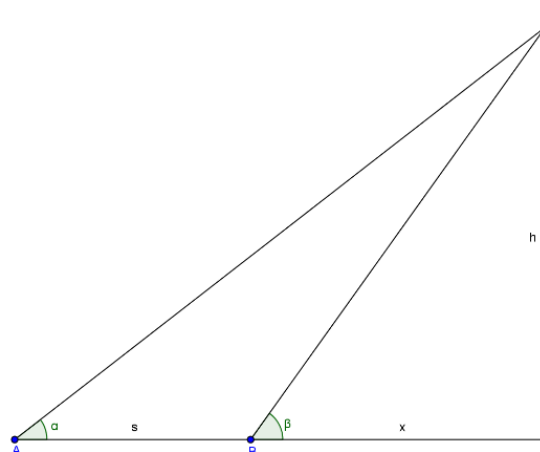
$$s+x = h \cdot \cot \alpha \quad x = h \cdot \cot \beta \quad \text{eingesetzt}$$

$$s + h \cdot \cot \beta = h \cdot \cot \alpha$$

$$h = \frac{s}{\cot \alpha - \cot \beta} = \frac{s \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}$$

numerisches Beispiel (Kühlturm)

$$\text{Augenhöhe: } 1.59 \text{ m}, s = 80.00 \text{ m}, \alpha = 13.13^\circ, \beta = 14.91^\circ$$



Lösung: $h = 152.5 \text{ m}$ (incl. Augenhöhe)

Übungsaufgabe:

Eine Beobachterin B befindet sich $a = 70 \text{ m}$ über dem Seespiegel. Sie sieht die Bergspitze unter dem Höhenwinkel $\alpha = 28^\circ$, das Spiegelbild unter einem Tiefenwinkel $\beta = 35^\circ$. Wie hoch liegt S über dem Seespiegel?

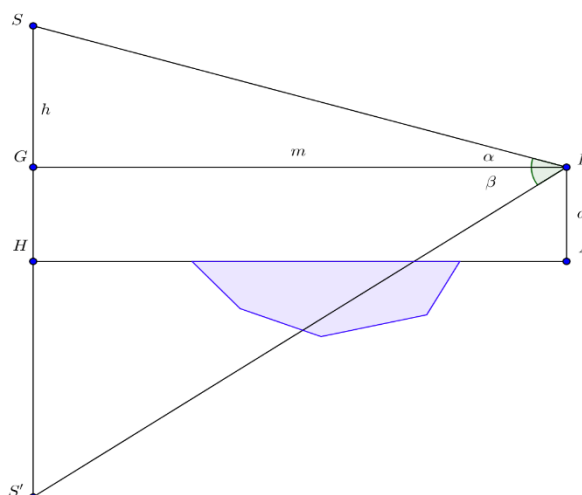
Lösung:

$$\tan \alpha = \frac{h - a}{m}$$

$$\tan \beta = \frac{h + a}{m}$$

aufgelöst nach h:

$$h = a \cdot \frac{\tan \beta + \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha}$$



Aufgabe:

Welchen Flächeninhalt I hat ein spitzwinkliges Dreieck, bei dem zwei Seiten a, b und der eingeschlossene Winkel γ gegeben sind?

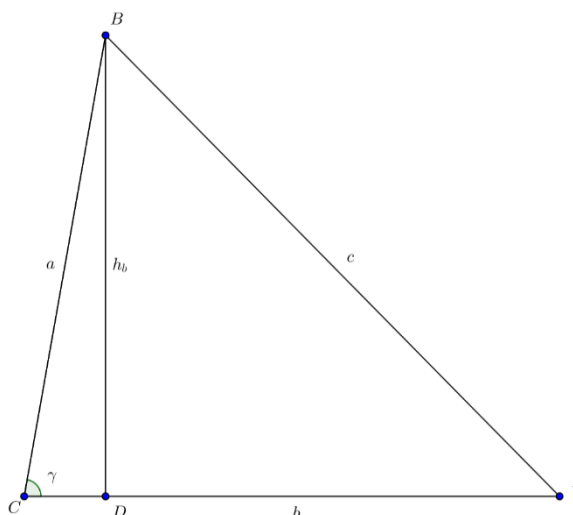
$$\sin \gamma = \frac{h_b}{a} \quad h_b = a \cdot \sin \gamma \quad (1)$$

$$I = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma \quad (1)$$

„halbes Produkt der beiden Seiten mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels“

numerisches Beispiel:

$$a = 8.0, b = 6.0, \gamma = 49.4^\circ \quad I \approx 18.2$$



Aufgabe:

Welchen Flächeninhalt hat ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkel s und dem Winkel 2α zwischen den beiden Schenkeln?

Der Flächeninhalt kann auf zwei Arten berechnet werden:

Einerseits gilt nach (1)

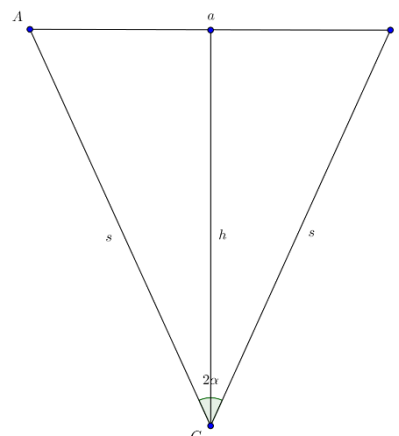
$$2I = s \cdot s \cdot \sin(2\alpha)$$

Andererseits aus Grundlinie und Höhe

$$2I = s \cdot s \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha$$

Daraus folgt die wichtige Formel:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$



Die eben hergeleitete Formel ermöglicht es, den Sinuswert des doppelten Winkels zu berechnen. Da für kleine Winkel der Sinus gut mit dem Bogenmass des entsprechenden Winkels übereinstimmt gilt:

$$\sin 1^\circ \approx \frac{\pi}{180} = 0.0174532\dots \quad TR : 0.017452406$$

$$\sin 2^\circ \approx 2 \cdot \frac{\pi}{180} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{180}\right)^2} = 0.034901\dots \quad TR : 0.034899497$$

$$\sin 4^\circ \approx 0.06760\dots \quad TR : 0.06975647$$

Im Kapitel Analysis 2 werden später für die trigonometrischen Funktionen Reihen hergeleitet.

Übungsaufgaben:

a)

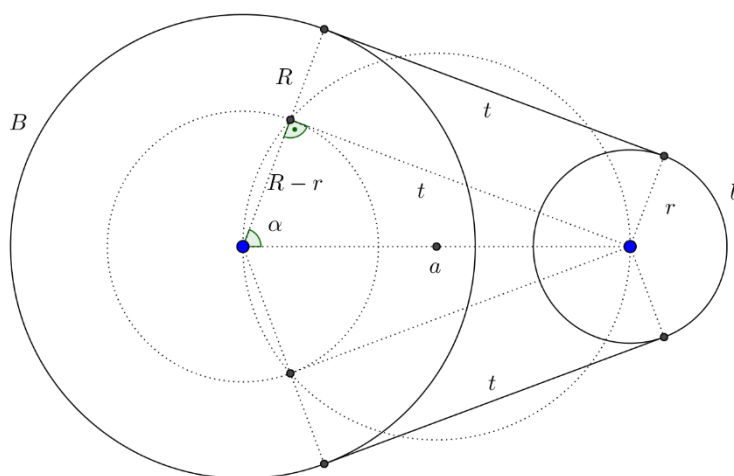
Einem Kreis mit Radius r ist ein reguläres n -Eck a) einbeschrieben b) umbeschrieben.

Welchen Flächeninhalt haben die entsprechenden Vielecke?

$$I_e = \frac{1}{2} \cdot nr^2 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right) \quad I_u = nr^2 \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

Aufgabe:

Gegeben sind die Radien von zwei kreisförmigen Rädern mit den Radien R und r , wobei $R > r$, deren Mittelpunkte den Abstand $a > R + r$ haben. Welche Länge L hat ein Treibriemen, der die beiden Räder verbindet?



Der Riemen setzt sich zusammen aus dem Bogen B über dem grossen Rad mit Zentriwinkel $360^\circ - 2\alpha$, dem Bogen b mit dem Zentriwinkel 2α und den zwei Tangentenabschnitten t . Für die Länge L des Bogens gilt damit:

$$L = B + b + 2t$$

Dabei gilt für den Winkel α :

$$\cos \alpha = \frac{R - r}{a} \quad \text{oder} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{R - r}{a}\right)$$

und für den Tangentenabschnitt t :

$$t = a \cdot \sin \alpha$$

Und die Bogenlängen:

$$B = 2\pi R \cdot \frac{360^\circ - 2\alpha}{360^\circ}$$

$$b = 2\pi r \cdot \frac{2\alpha}{360^\circ}$$

numerisches Beispiel:

$$R = 12, \quad r = 5, \quad a = 20$$

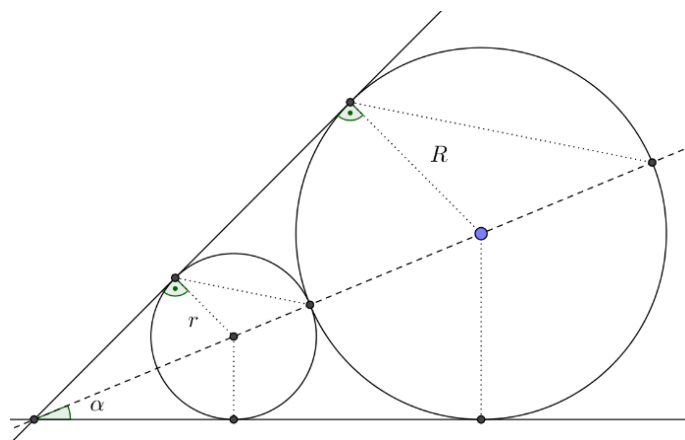
$$\text{Lösung: } L = 92$$

Übungsaufgabe:

Zwei Kreisscheiben mit Radius $r_1 = 40$ cm und $r_2 = 20$ cm sind mit gekreuzten Lederriemen verbunden. Der Winkel des Riemens an der Kreuzungsstelle ist 60° . Wie lang ist der Riemen?

Übungsaufgabe:

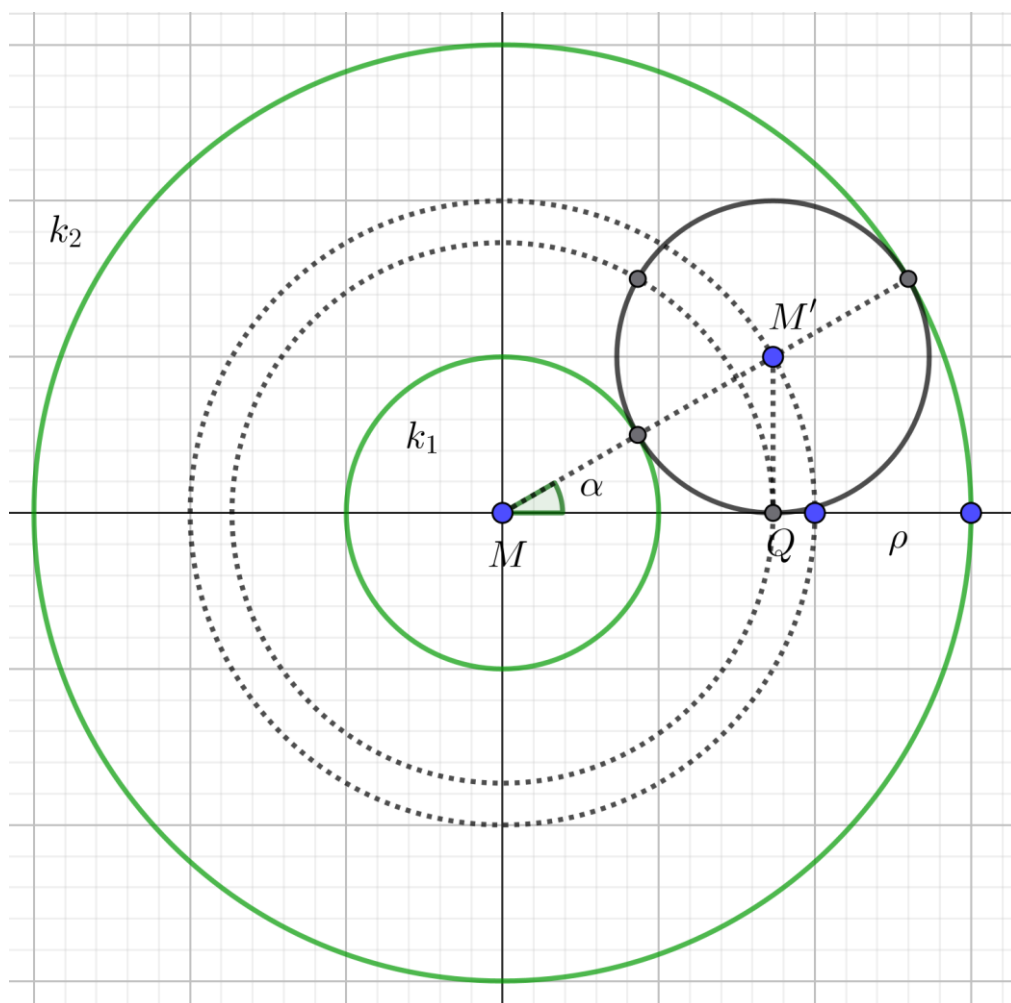
In der Abbildung sind der Winkel 2α und der Radius R des grösseren Kreises gegeben. Welchen Radius r hat der kleinere Kreis?



Das «Kugellagerproblem»

Gegeben sind zwei konzentrische Kreise. Gesucht sind weitere Kreise, so dass jeder die gegebenen Kreise von innen berührt. Zudem soll jeder weitere Kreis den benachbarten (Ketten)-Kreis ebenfalls berühren. Auf diese Weise entsteht eine sogenannte Steinerkreiskette (Jakob Steiner (1796.1863)). Es ergibt sich daraus das Problem, wann eine solche Steinerkette sich schliesst. Das Problem tritt technisch etwa beim Radlager eines Fahrrades oder beim Kugellager auf. Steinerketten findet man oft auch bei den Rosettenfenstern von gotischen Kathedralen.

Lösung:



Die Mittelpunkte der **Kettenkreise** liegen auf Kreisen mit Mittelpunkt M und Radius $\overline{MM'} = \frac{1}{2} \cdot (R_1 + R_2)$. (arithmetisches Mittel) Ihr Radius ist $\rho = \frac{1}{2} \cdot (R_2 - R_1)$

Die **Berührungspunkte** der Kettenkreise liegen ebenfalls auf einem Kreis mit Radius \overline{MQ}
Im rechtwinkligen Dreieck MM'Q gilt:

$$\overline{MQ}^2 = \frac{1}{4} \cdot (R_1 + R_2)^2 - \frac{1}{4} \cdot (R_2 - R_1)^2 = R_1 \cdot R_2$$

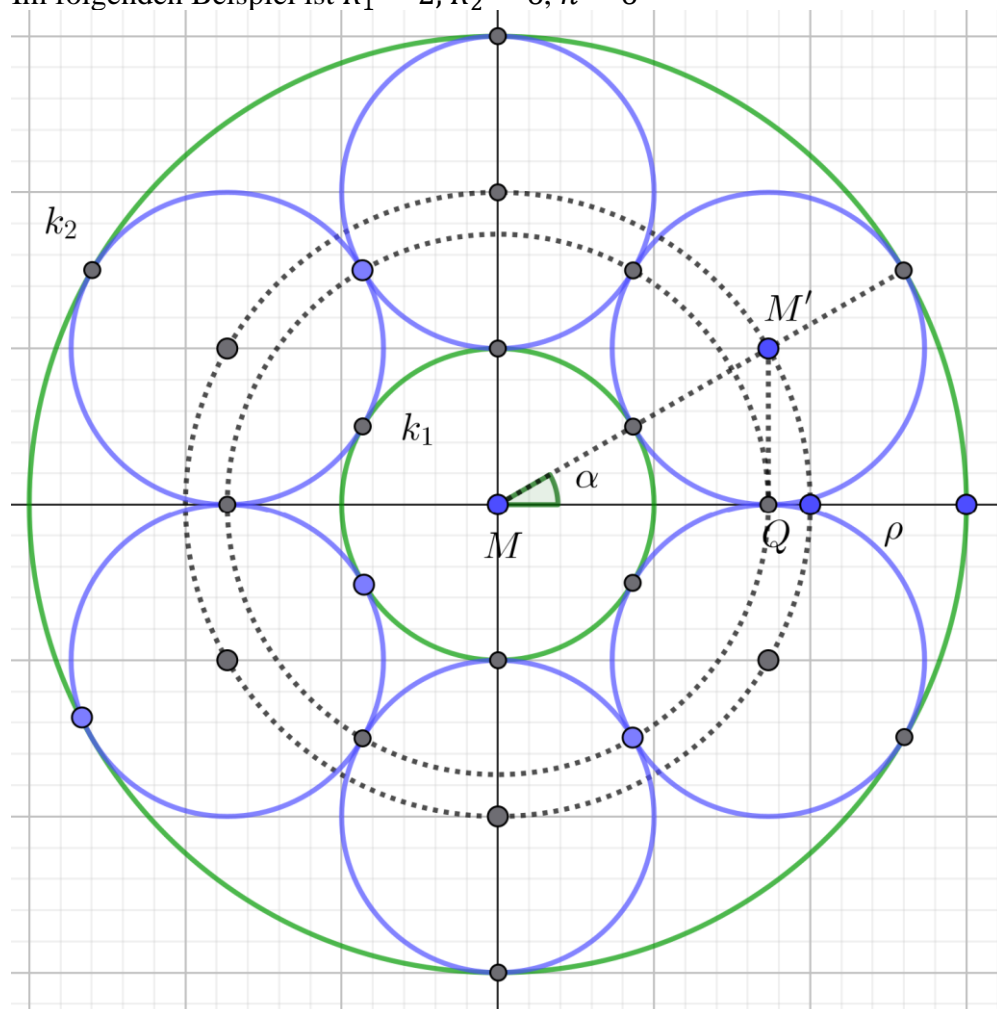
Der Radius \overline{MQ} der Berührungspunkte ist also gerade gleich dem geometrischen Mittel der Grundkreise.

Der Winkel α in der Abbildung berechnet sich zu

$$(\tan \alpha)^2 = \left(\frac{\overline{M'Q}}{\overline{MQ}} \right)^2 = \frac{(R_2 - R_1)^2}{4R_1R_2}$$

Soll sich die Kette nach einem Umlauf schliessen, dann sind R_1 bzw. $n \cdot 2\alpha = 2\pi$ also $\alpha = \frac{\pi}{n}$ gilt.

Im folgenden Beispiel ist $R_1 = 2, R_2 = 6, n = 6$

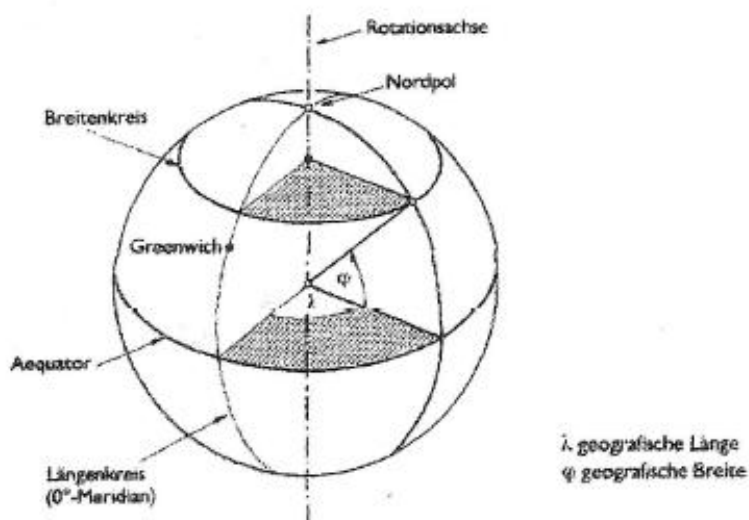


Quelle: Prof. Zeitler; MNU 1984, Heft 1

Verallgemeinerungen des Problems sind im empfehlenswerten Buch von Coxeter: Unvergängliche Geometrie Birkhäuser 1981 zu finden. Bei der Lösung spielt die Inversion eine wichtige Rolle. → Weitere Themen → Komplexe Zahlen → Abbildung durch Kreisinverson.

9. Aufgaben aus der Geografie

Bei den folgenden Aufgaben wird die Erde als Kugel mit dem Radius $6.37 \cdot 10^3$ km angenommen.



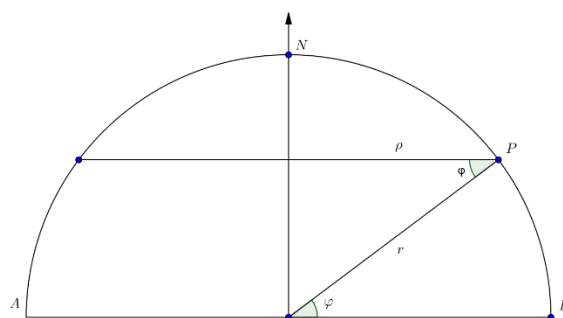
Aufgabe:

Wie gross ist die Geschwindigkeit, mit der sich eine Erdbewohnerin im Punkt P mit der geografischen Länge λ und der geografischen Breite φ um die Erdachse bewegt?

In der Abbildung ist der Schnitt durch den Längsmeridian von P dargestellt. In 24 Stunden legt die Erdbewohnerin den Umfang des Breitenkreises mit Radius ρ zurück:

Umfang des Breitenkreises:

$$U = 2\pi\rho = 2\pi R \cdot \cos \varphi$$



Im Spezialfall

Zofingen

($\lambda = 7.94383^\circ \text{ E}$, $\varphi = 47.28351^\circ \text{ N}$)

legt die Bewohnerin

$$U = 2\pi\rho = 2\pi R \cdot \cos \varphi \approx 27151 \text{ km}$$

in 24·3600 s zurück, bewegt sich also mit einer Geschwindigkeit von $v = 314 \text{ m/s}$ um die Erdachse.

Zusatzfrage:

Auf welchem Breitenkreis könnte ein Flugzeug mit der Durchschnittsgeschwindigkeit von 300 km/h (hin und wieder kmh genannt!?) in einem Tag gerade um die Erde fliegen?

Lösung: $2\pi R \cdot \cos \varphi = 24 \cdot 300 \quad \varphi = 79.6^\circ$

Übungsaufgabe:

Der 47° -Breitenkreis geht durch Neuchâtel ($\lambda = 6^\circ 57'$) und Bad Ragaz ($\lambda = 9^\circ 30'$).

Welchen sphärischen Abstand haben die beiden Ortschaften?

Aufgabe:

An einem klaren Tag kann man mit einem guten Fernrohr von Konstanz aus quer über den Bodensee zum $e=46 \text{ km}$ entfernten Bregenz blicken. Bei den folgenden Aufgaben wird an diesem Beispiel der Einfluss der Erdkrümmung untersucht.

1.

Wie hoch kann ein Turm in Bregenz sein, der von Konstanz aus bei Augenhöhe $c = 0$ noch in voller Höhe sichtbar sein soll?

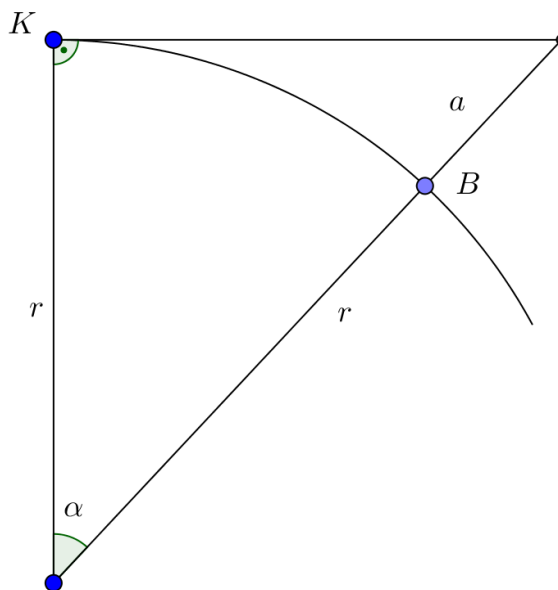
$$\cos \alpha = \frac{r}{a+r}$$

$$(a+r) \cdot \cos \alpha = r$$

$$a \cdot \cos \alpha + r \cdot \cos \alpha = r$$

$$a \cdot \cos \alpha = r - r \cdot \cos \alpha = r \cdot (1 - \cos \alpha)$$

$$a = \frac{r \cdot (1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha} = r \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$$



2.

Wie ändert sich das Resultat, wenn die Beobachtung in Bregenz aus der Augenhöhe c erfolgt?

$$\sin \gamma = \frac{r}{r+c} \rightarrow \gamma$$

also gilt:

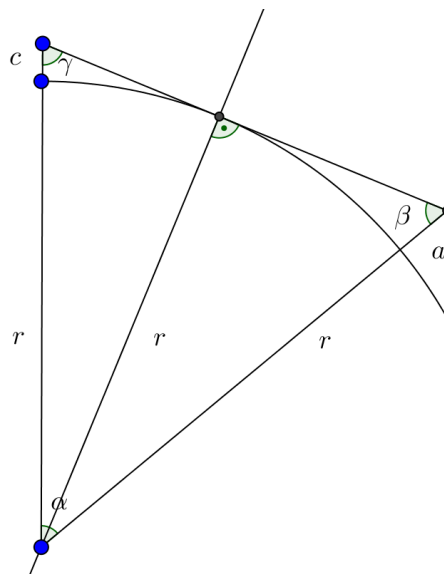
$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

und wegen

$$\sin \beta = \frac{r}{a+r}$$

schliesslich

$$a = r \cdot \left(\frac{1}{\sin \beta} - 1 \right)$$



c in m	c in km	sin(gamma)	gamma rad	gamma Grad	beta rad	beta grad	a in m
0	0	1.0000000	1.5707963	90.00000	1.56357	89.58599	0.1662
1.7	0.0017	0.9999997	1.5700655	89.95813	1.56430	89.62786	0.1343
10	0.01	0.9999984	1.5690238	89.89844	1.56534	89.68754	0.0947
100	0.1	0.9999843	1.5651913	89.67885	1.56918	89.90713	0.0084

3.

Wie gross ist die „Aufwölbung“ h des Bodensees zwischen Koblenz und Bregenz?

$$\frac{d}{2r} = \sin \alpha \rightarrow \alpha$$

$$\frac{r-h}{r} = \cos \alpha$$

$$h = r \cdot (1 - \cos \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - (\sin \alpha)^2} = \sqrt{1 - \frac{d^2}{4r^2}}$$

Verwendet man die im Abschnitt Analysis 2
→Potenzreihen→ Binomialreihe hergeleitete
Näherungsformel:

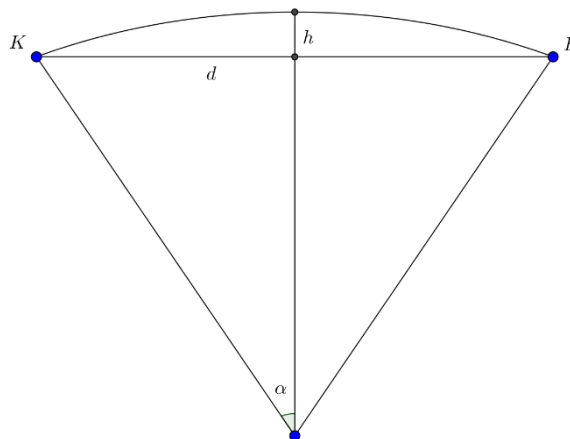
$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

so vereinfacht sich (2) zu

$$h \approx \frac{d^2}{8r}$$

wobei d bzw. r in km anzugeben sind.

Im Beispiel erhält man für die Aufwölbung den überraschenden Wert 41.5 m.

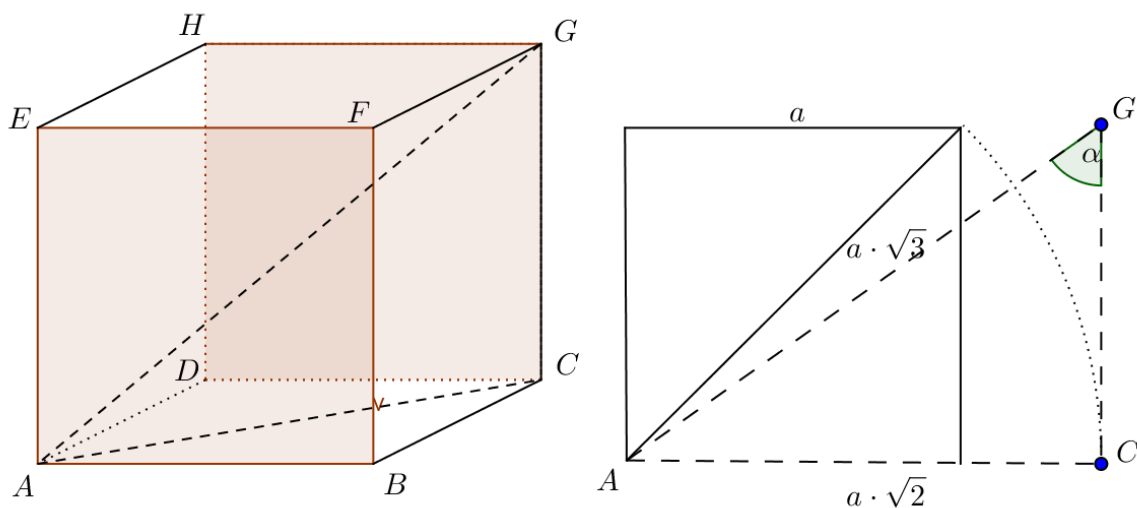


9. Winkel bei regulären Polyedern

Räumliche Aufgaben können auf ebene zurückgeführt werden, indem man geeignete Schnitte betrachtet.

1. Der Würfel (Hexaeder) $e = 8$ $f = 6$ $k = 12$

Welchen Winkel α schliesst eine Würfelkante mit der Raumdiagonalen ein?



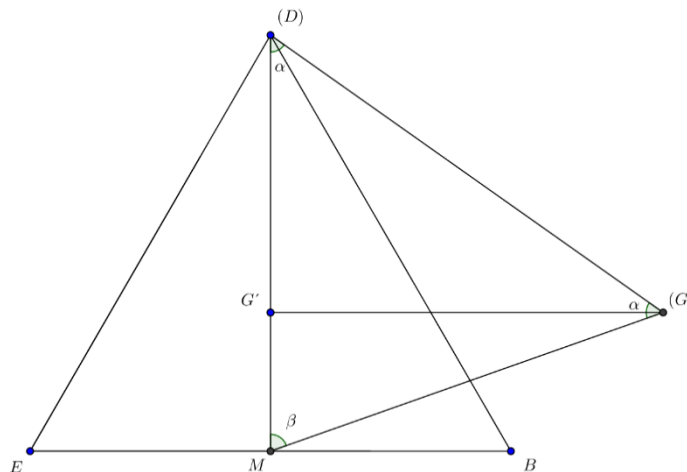
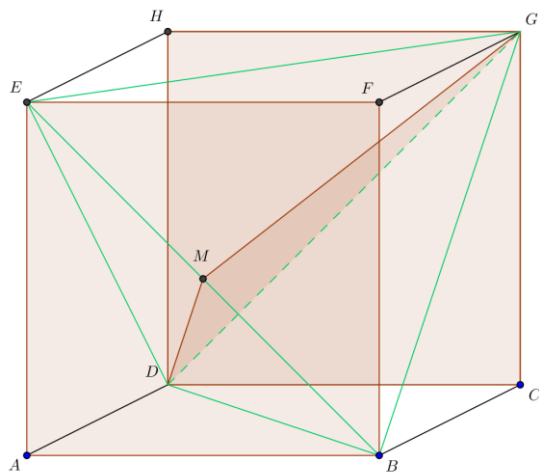
Dazu wird das rechtwinklige Dreieck ACG aus einer Kante, einer Flächendiagonalen und einer Raumdiagonale betrachtet:

$$\alpha = \arctan(\sqrt{2}) \approx 54.74^\circ$$

2. Das Tetraeder $e = 4$ $f = 4$ $k = 6$

Gesucht ist im regelmässigen Tetraeder

- der Winkel α zwischen einer Kante und einer Fläche
- der Winkel β zwischen zwei Flächen



In der Abbildung rechts ist der Grundriss des Tetraeders EBDG mit der Grundfläche DBE in der xy-Ebene dargestellt. Legt man einen geeigneten Schnitt in die Grundebene, so entsteht das gleichschenklige Dreieck DMG, wobei die Tetraederseite gleich der Flächendiagonalen des links dargestellten Würfels ist.

Da alle Tetraeder zueinander ähnlich sind, kann die Tetraederkante geeignet gewählt werden. Wählt man als Tetraederkante 2 dann gilt für die Höhe des gleichseitigen Dreiecks:

$$h = \overline{MD} = \sqrt{3}$$

Da die Höhe zugleich Seitenhalbierende ist verhalten sich die Höhenabschnitte wie 2: 1 d.h. es gilt:

$$\overline{MG'} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \overline{DG'} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{DG'}}{\overline{DG}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und damit $\alpha \approx 54.7^\circ$

Wegen

$$\cos \beta = \frac{1}{3}$$

folgt $\beta \approx 70.5^\circ$

Variante: $\beta = 180^\circ - 2\alpha$

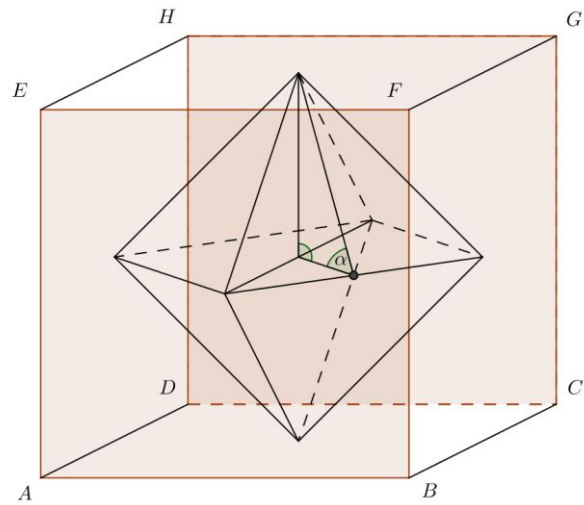
3. Das reguläre Oktaeder $e = 6$ $f = 8$ $k = 12$

Das reguläre Oktaeder wird von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Die Mitten der sechs Seitenflächen des Würfels bilden ein reguläres Oktaeder.

Gesucht ist der Winkel 2α zwischen zwei benachbarten Seitenflächen.

Halbiert man das Oktaeder so ist zu erkennen, dass sich Gegenkathete und Ankathete des halben Winkels α wie die Diagonale und die Seite eines Quadrats verhalten. Damit gilt für den gesuchten Winkel 2α zwischen zwei benachbarten Seitenflächen

$$2\alpha = 2 \cdot \arctan(\sqrt{2}) \approx 109.5^\circ$$



10. Steigungswinkel einer Geraden

Der Winkel, den eine Gerade mit der positiven x-Achse einschliesst, heisst Steigungswinkel der Geraden.

Die Steigung m einer Geraden gibt die Veränderung der y-Koordinate an, wenn x um 1 wächst:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

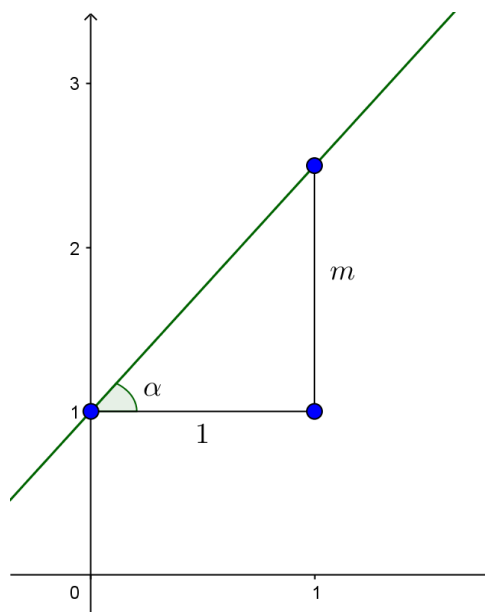
Satz:

$$m = \tan \alpha$$

Die Steigung ist gleich dem Tangens des Steigungswinkels.

a% Steigung bedeutet also a Meter Höhendifferenz auf 100 Meter Horizontaldistanz.

Insbesondere bedeutet Steigung 100%: Steigungswinkel 45° .



Beispiel:

$$3x - 2y + 2 = 0 \quad \text{implizite Form}$$

$$y = \frac{3}{2}x + 1 \quad \text{explizite Form}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56.3^\circ$$

Beispiel:

Die Polybahn überwindet auf 176 m Horizontaldistanz eine Höhendifferenz von 41 m.

Die Steigung beträgt

$$m = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{41}{176} \approx 0.23 \text{ d.h. also } 23\%.$$

Der Steigungswinkel beträgt

$$\alpha = \arctan\left(\frac{41}{176}\right) \approx 13.1^\circ$$

Übungsaufgaben:

1.
auf einer Karte im Massstab 1: 25'000 liegen die Höhenlinien der Koten 700 und 800 im Abstand 9 mm. Welchen Neigungswinkel hat der Hang?
2.
5 mm dicke Regentropfen fallen mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 8m/s. Unter welchem Winkel klatschen sie auf die Fensterscheiben eines mit 80 km/h fahrenden Zugs (der Klatschwinkel eines stehenden Zugs soll 0° betragen).
3.
Die Lauberhorn-Abfahrt weist sie eine Höhendifferenz von 1025 Metern und eine Streckenlänge von 4455 Metern auf. Der Neigungswinkel ist im Hundschopf und im Zielschuss maximal 42° . Wie gross ist der durchschnittliche Neigungswinkel der Abfahrtsstrecke?

Lösungen:

- 1.
2. Ungefähr 20°
- 3.

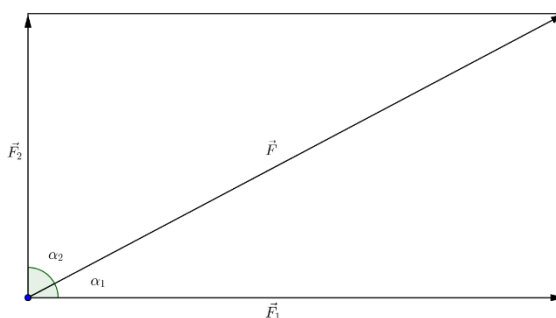
11. Beispiele aus der Physik

Aufgabe:

Der Kraftvektor \vec{F} mit $|\vec{F}| = 7500 \text{ N}$ ist in zwei Komponenten \vec{F}_1 und \vec{F}_2 zu zerlegen, die mit \vec{F} die Winkel $\alpha_1 = 27.8^\circ$ und $\alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1$ einschliessen.

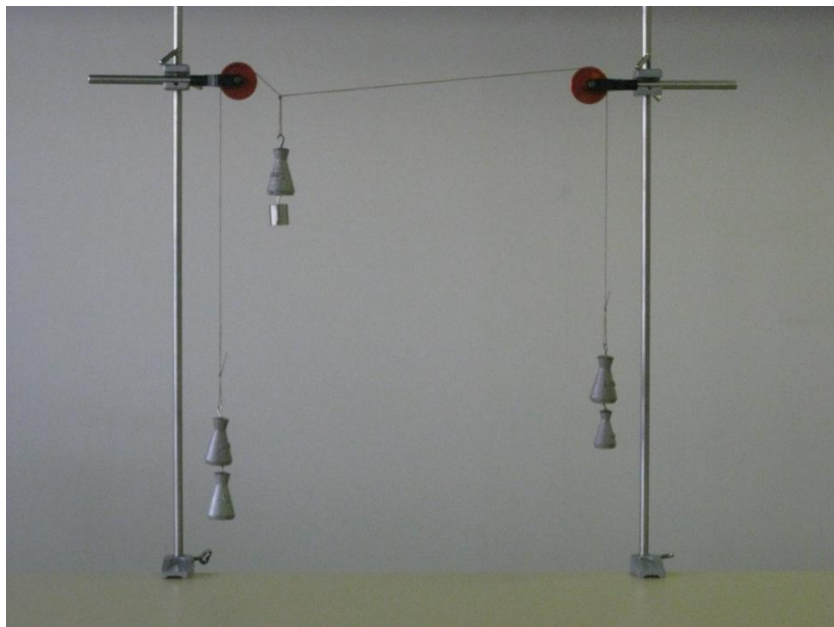
$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \cos \alpha \approx 6634.4 \text{ N}$$

$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}| \cdot \sin \alpha \approx 3497.9 \text{ N}$$



Aufgabe: Drei Gewichte

Über zwei Rollen im Abstand von 4.7 dm in gleicher Höhe wird eine Schnur gelegt, an deren Enden je ein Gewicht mit der Gewichtskraft von 3 N bzw. 4 N hängt. Zwischen den beiden Rollen ist an einem Knoten ein Gewicht mit einer Gewichtskraft von 3 N befestigt. Wie gross ist der Winkel, den der Knoten im Gleichgewichtszustand mit den beiden Rollen bildet?

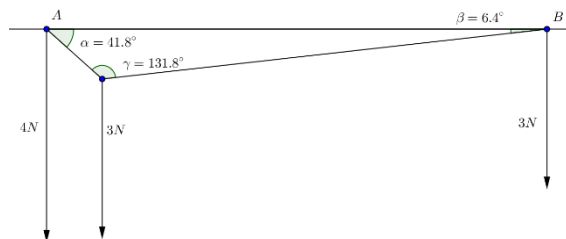
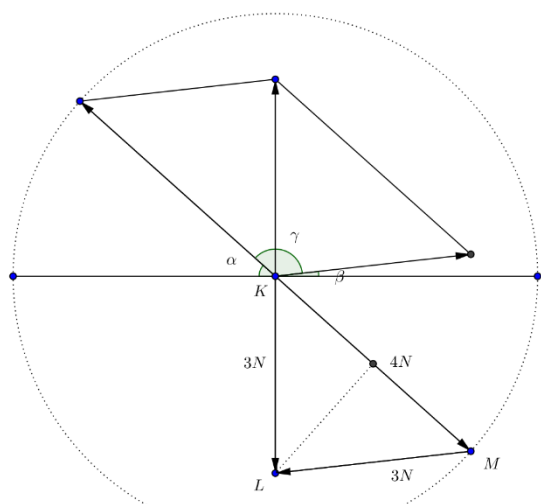


Versuchsanordnung: Markus Ninck, Foto: Rudolf Fischer 20.2.2012

Den drei Kräften entspricht das gleichschenklige Dreieck KLM mit der Basis KM. Im rechtwinkligen Teildreieck gilt:

$$\cos \varepsilon = \frac{2}{3} \text{ und daraus } \varepsilon = 48.2^\circ$$

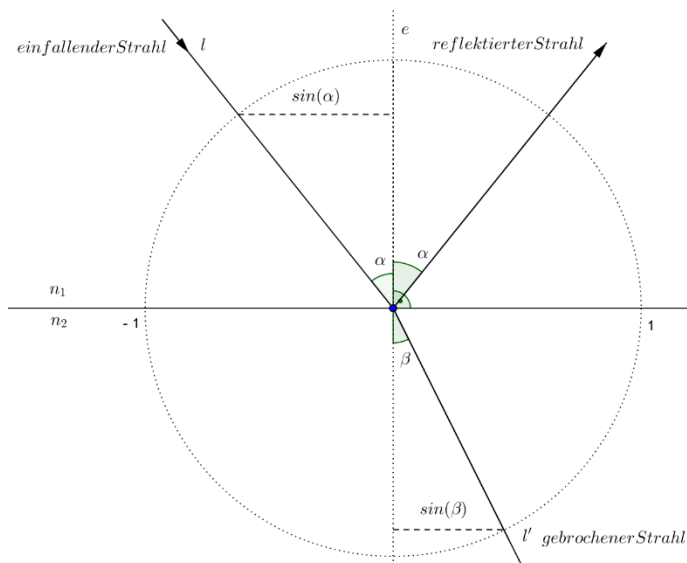
Damit ergeben sich die gesuchten Winkel zu $\alpha = 6.4^\circ$ und $\beta = 41.8^\circ$.



Aufgabe: Brechungsgesetz

Ein Lichtstrahl, der auf die Grenzfläche von zwei optischen Medien trifft, wird reflektiert oder gebrochen.

l	Lichtstrahl
l'	gebrochener Lichtstrahl
e	Einfallslot
α	Einfallswinkel
β	Brechungswinkel



Für den reflektierten Teil des Lichts ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel.

Für den gebrochenen Lichtstrahl gilt das

Brechungsgesetz von Snellius:

1. l , l' und e liegen in einer Ebene.
Einfalls- und Brechungswinkel hängen vom Brechungsindex n ab. Er ist bestimmt durch die Lichtgeschwindigkeit in den beiden Medien.

$$2. \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad n \text{ heisst Brechungsindex}$$

Beim Übergang

von Luft in Wasser ist $n \approx 1.33$

von Luft in gewöhnliches Glas ist $n \approx 1.54$

Übungsaufgaben:

a)

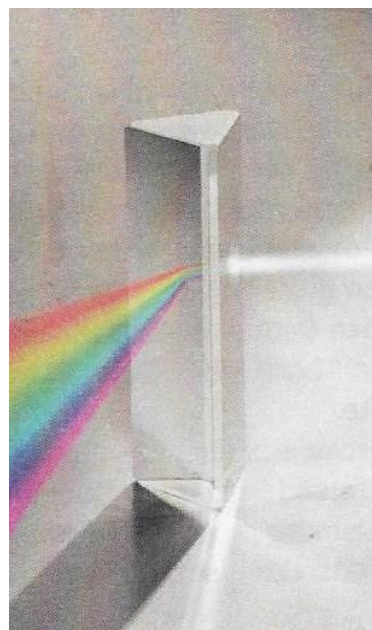
Wie gross ist beim Übergang von Luft in Wasser der Winkel β für den Einfallswinkel $\alpha = 27^\circ$?

Lösung: 20°

b)

Wie gross ist für $\beta = 32.3^\circ$ der zugehörige Winkel α , wenn der Lichtstrahl umgekehrt von Glas in die Luft austritt? Bei welchem Winkel tritt Totalreflexion ein?

Lösung: $\alpha = 54.3^\circ$, Totalreflexion bei 71.3°



Planparallele Glasplatten

Ein Lichtstrahl fällt mit dem Einfallswinkel α auf eine plane Glasplatte der Dicke d . Wie gross ist die parallele Verschiebung v des ausfallenden Lichtstrahls zum einfallenden Strahl.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad \sin \beta = \frac{1}{n} \cdot \sin \alpha$$

$$s = d \cdot \tan \beta$$

$$m = \sqrt{s^2 + d^2}$$

$$v = m \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

oder auch

$$v = d \cdot \sin \alpha \cdot \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right)$$

