

11. Trigonometrische Gleichungen

In diesem Abschnitt werden trigonometrische Gleichungen behandelt, die explizit lösbar sind. Falls eine explizite Lösung nicht möglich ist, stehen Näherungsverfahren zur Verfügung.

a) Typ „Ausklammern“

Hin und wieder führt wie im folgenden Beispiel die Anwendung von Grundbeziehungen oder Additionstheorem zur Lösung:

$$\sin(2x) - \cos x = 0$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x \cdot (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Ausklammern

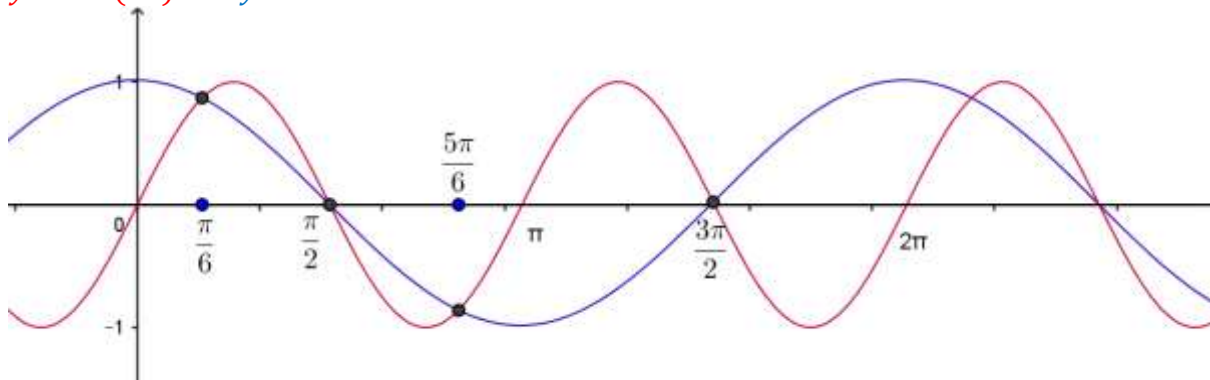
Lösungen: $90^\circ, 270^\circ$

Lösungen: $30^\circ, 150^\circ$

Graphische Lösung:

Die Lösungen ergeben sich als die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Kurven

$y = \sin(2x)$ und $y = \cos x$.



b) Typ „Quadratische Gleichung“

$$\cos x + \cos(2x) = 0$$

$$\cos x + 2 \cos^2 x - 1 = 0 \quad \text{Substitution } u = \cos x$$

$$2u^2 + u - 1 = (2u - 1) \cdot (u + 1) = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad x_1 = 120^\circ \quad x_2 = 240^\circ$$

$$u_2 = -1 \quad x_3 = 180^\circ \quad u_2 = -1$$

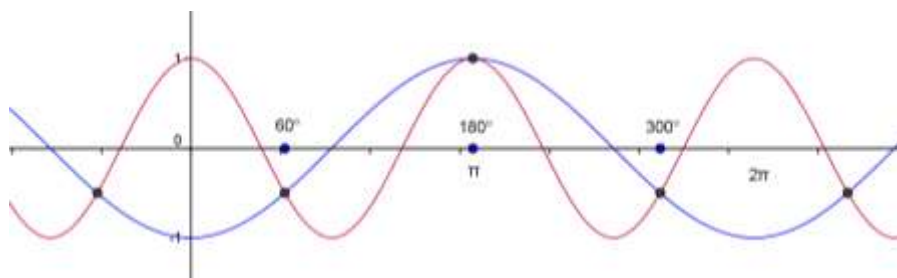
Graphische Lösung:

Die Lösungen ergeben sich

als die x-Koordinaten der

Schnittpunkte der Kurven

$y = \cos(2x)$ und $y = -\cos x$.



c) Typ: $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + c = 0$

Spezialfall $c = 0$

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Die x -Werte mit $\cos x = 0$ kommen als Lösungen nicht in Frage, denn für diese ist $\sin x \neq 0$. Die Gleichung kann deshalb durch $\cos x$ dividiert werden.

Die Lösungen ergeben sich damit aus der Gleichung

$$\tan x = -\frac{b}{a}$$

Beispiel.

$$\sin x = 2 \cos x \quad \tan x = 2$$

$$x_1 \approx 63.2^\circ, x_2 = x_1 + 180^\circ \approx 243.2^\circ$$

Allgemeiner Fall:

Zunächst ist zu prüfen, ob $x = 180^\circ$ eine Lösung der Gleichung ist.

Mit den sogenannten Rationalisierungformeln kann die Gleichung in eine quadratische Gleichung übergeführt werden.

Mit $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ muss gelten:

$$a \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + c = 0$$

$$2at + b \cdot (1-t^2) + c \cdot (1-t^2) = 0$$

Beispiel:

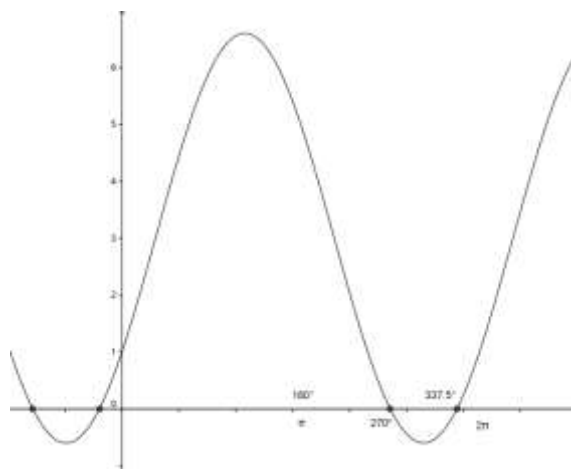
$$3\sin x - 2\cos x + 3 = 0 \rightarrow 5t^2 + 6t + 1 = 0$$

$$t_1 = -\frac{1}{5} \rightarrow x_1 = 2 \cdot \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) \approx 337.5^\circ,$$

$$t_2 = -1 \rightarrow x_2 = 270^\circ$$

Grafische Lösung:

In der Abbildung ergeben sich die Lösungen als Nullstellen der Funktion $f(x) = 3\sin x - 2\cos x + 3$



Übungsaufgabe:

$$2\cos x - \sin x + 2 = 0 \rightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

Lösungen: $x_1 = 90^\circ, x_2 = 240^\circ$

Viele trigonometrische Gleichungen sind nur durch Näherungsverfahren lösbar.

d) Der **Bisektionsalgorithmus** (Intervallhalbierung)

Es handelt sich um ein Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen einer Gleichung $f(x) = 0$.

Voraussetzung:

f ist stetig im Intervall $[a, b]$ und $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$

f hat also an den Intervallgrenzen verschiedene Vorzeichen. Gegebenenfalls kann die Gleichung mit (-1) multipliziert werden.

Nach dem Zwischenwertsatz hat dann f mindestens eine Nullstelle im Innern des Intervalls, d.h. der Graph von f schneidet mindestens einmal die x -Achse.

Die Lösung wird nun schrittweise durch Halbieren des Intervalls angenähert.

Bisektionsalgorithmus (nach Gander):

$x := (a + b)/2$

while $(b - a) > \varepsilon$ do

begin

 if $f(x) > 0$ then $b := a$ else $a := x$

$x := (a + b)/2$

end.

bestimme die Intervallmitte

tue solange die gewünschte Genauigkeit nicht erreicht ist (*)

Wahl des nächsten Intervalls

neue Intervallmitte

(*) Verbesserte Abbruchbedingung:

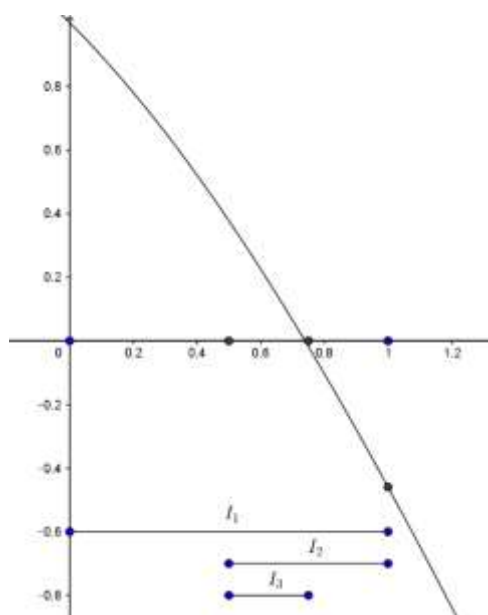
while $(a < x)$ and $(x < b)$

Illustration am Beispiel $\cos x = x$

$$f(x) = \cos x - x$$

Die Voraussetzung ist im Intervall $[0,1]$ erfüllt.

Die Gleichung hat die Lösung $x = 0.73908513\dots$



n	a	b	f(a)	f(b)	m	f(m)	Intervallbreite
	untere Grenze	obere Grenze	positiv	negativ	Mitte		
0	0	1	1.000000000	-0.459697694	0.5	0.377582562	1.000000000
1	0.5	1	0.377582562	-0.459697694	0.75	-0.018311131	0.500000000
2	0.5	0.75	0.377582562	-0.018311131	0.625	0.185963120	0.250000000
3	0.625	0.75	0.185963120	-0.018311131	0.6875	0.085334946	0.125000000
4	0.688	0.7500	0.085334946	-0.018311131	0.71875	0.033879372	0.062500000
28	0.73908513	0.73908513	0.000000005	-0.000000002	0.73908513	0.000000002	0.000000000
29	0.73908513	0.73908513	0.000000002	-0.000000002	0.73908513	0.000000000	0.000000000
30	0.73908513	0.73908513	0.000000000	-0.000000002	0.73908513	-0.000000001	0.000000000
31	0.73908513	0.73908513	0.000000000	-0.000000001	0.73908513	0.000000000	0.000000000

e) Gleichungen der Form $g(x) = x$

Unter Iteration versteht man einen Rechengvorgang, der sich ständig wiederholt, wobei die gesuchte Lösung schrittweise besser angenähert wird.

Illustration des Verfahrens am gleichen Beispiel $\cos x = x$:

In der Abbildung sind die Kurven $y = \cos x$ und $y = x$ dargestellt.

Zuerst wird ein Startwert gewählt

z.B: $x_1 = 0.5$

Anschliessend berechnet man schrittweise

$$x_{k+1} = \cos x_k$$

$$x_1 = 0.5.$$

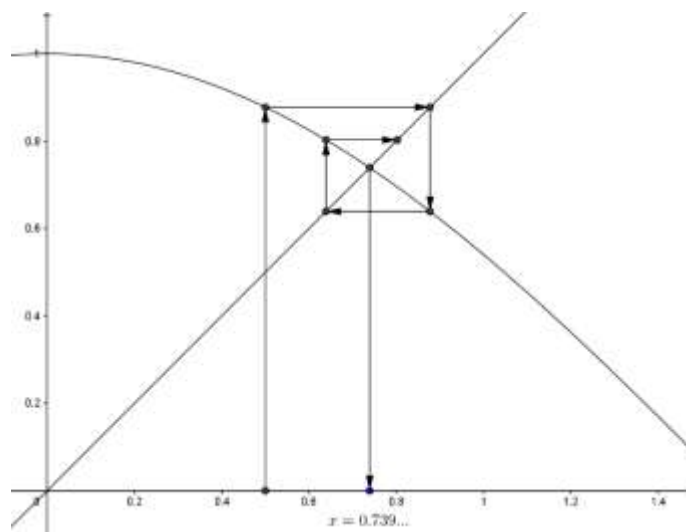
$$x_2 = \cos(0.5) = 0.877 \dots$$

$$x_3 = \cos(0.877 \dots) = 0.639 \dots$$

...

Nach mehrfachem Drücken der Cosinustaste nähert sich Wert schliesslich

$$x = 0.739085133$$



Die Annäherung kann in der Abbildung verfolgt werden. Es entsteht ein spiralförmiger Streckenzug der sich dem Grenzpunkt, dem Schnittpunkt der beiden Kurven immer mehr nähert.

Im Abschnitt → Numerische Verfahren wird gezeigt, dass dieses Verfahren konvergiert, wenn der Graph der Funktion nicht steiler als die Winkelhalbierende steigt bzw. fällt.