

# Kegelschnitte

## 1. Einleitung

Schon in der Antike hat man sich mit Kegelschnitten und ihren Eigenschaften befasst (Apollonius von Perge (265-190 v. Chr.).

Unter einem geraden Kreiskegel mit der Spitze  $S$ , der Achse  $s$  und dem halben Öffnungswinkel  $\alpha$  versteht man die Menge aller Punkte auf Geraden durch  $S$ , die mit der Achse  $s$  den Winkel  $\alpha$  einschliessen. Die Geraden heissen Mantellinien des Kegels.

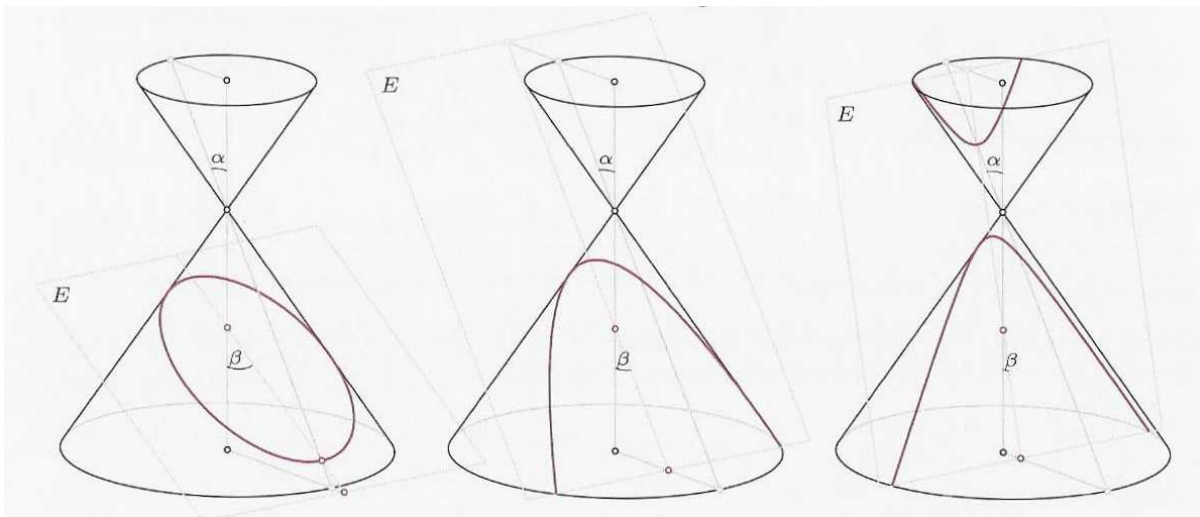
Definition eines Kegelschnitts

Der Doppelkegel wird mit einer Ebene  $\sigma$ , die nicht durch die Spitze  $S$  verläuft und die mit der Kegelachse den Winkel  $\beta$  bildet geschnitten. Die zugehörigen Schnittkurven, die sogenannten Kegelschnitte, heissen dann

Ellipse, falls  $\beta > \alpha$

Parabel, falls  $\beta = \alpha$

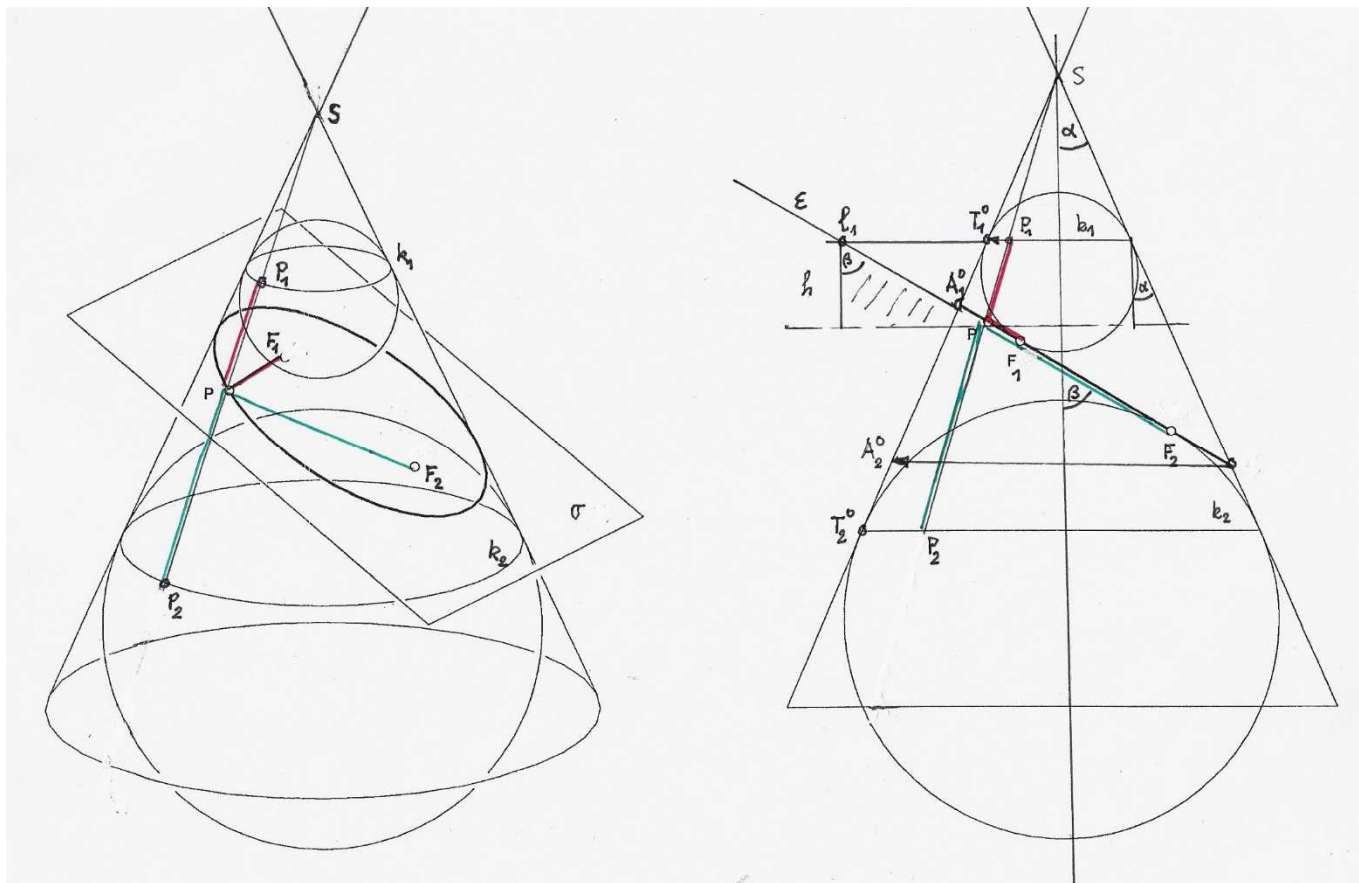
Hyperbel, falls  $\beta < \alpha$



## 2. Die Ellipse

### 2.1 Brennpunktdefinition

Bei der Untersuchung der Kegelschnitte spielen die so genannten Dandelinschen Kugeln (nach G.P. Dandelin 1774-1847)) eine wesentliche Rolle.



Die beiden Dandelinkugeln berühren die Schnittebene in den beiden Punkten  $F_1$  und  $F_2$ , den Brennpunkten. Die Mantellinie durch einen Punkt  $P$  der Schnittkurve schneidet die beiden Berührkreise in den Punkten  $P_1$  und  $P_2$ .

Bekanntlich gilt:

Legt man von einem Punkt ausserhalb einer Kugel Tangenten an die Kugel, dann sind die Tangentenabschnitte alle gleich lang.

Deshalb folgt:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PP_1} + \overline{PP_2} = \overline{P_1P_2} = \overline{T_1^0T_2^0} = 2a \quad \text{oder}$$

$$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a}$$

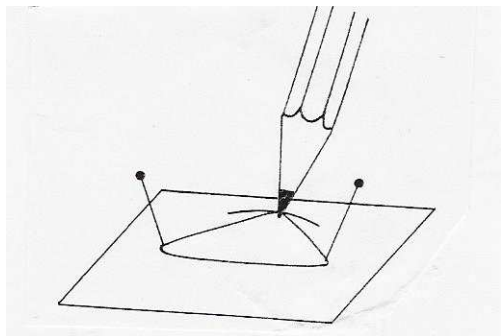
2.1.1

denn die Abschnitte der Mantellinien zwischen zwei Berührkreisen sind gleich lang.

**Definition der Ellipse (Brennpunktdefinition)**

Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstandssumme von zwei gegebenen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  konstant ist.

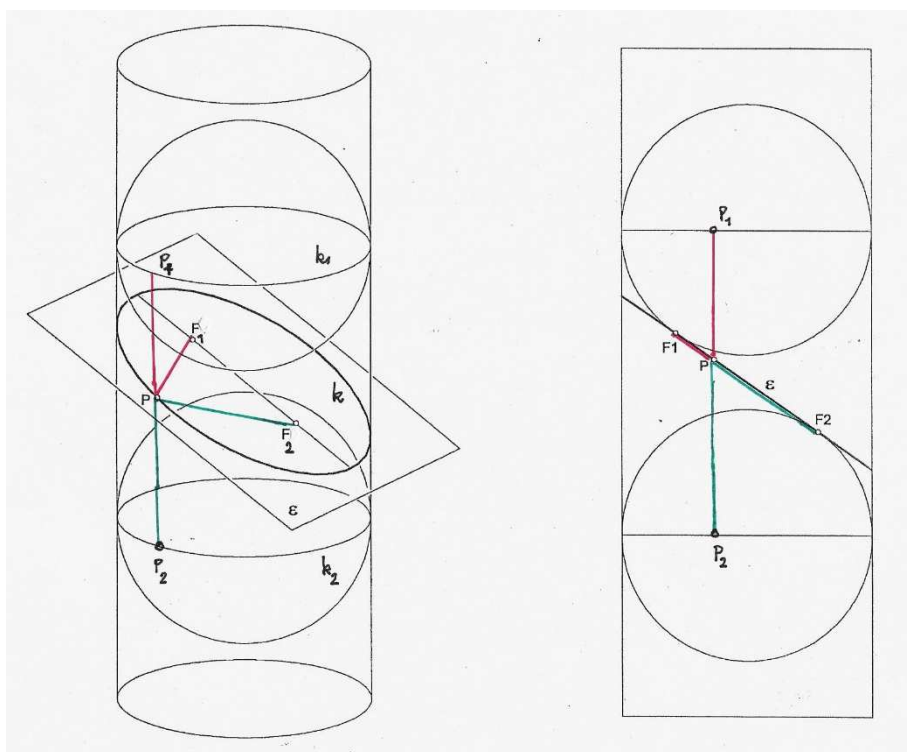
Auf dieser Definition beruht die sogenannte Gärtnerkonstruktion der Ellipse



Eine Ellipse entsteht auch, wenn ein Kreiszyylinder von einer Ebene geschnitten wird.

Es gilt nämlich:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PP_1} + \overline{PP_2} = \overline{P_1P_2} = \textit{konstant}$$



Aufgabe:

Von einer Ellipse sind die grosse Halbachse  $a = 5$  und der Abstand der Brennpunkte  $\overline{F_1F_2} = 2c = 8$  bekannt. Es sind die Scheitelpunkte, Brennpunkte und ein beliebiger Ellipsenpunkt P zu konstruieren.

Der Punkt P ist der Schnittpunkt eines Kreises um  $F_1$  mit Radius  $r_1$  ( $a - c \leq r_1 \leq a + c$ ) mit dem Kreis um  $F_2$  mit Radius  $r_2 = 2a - r_1$ .

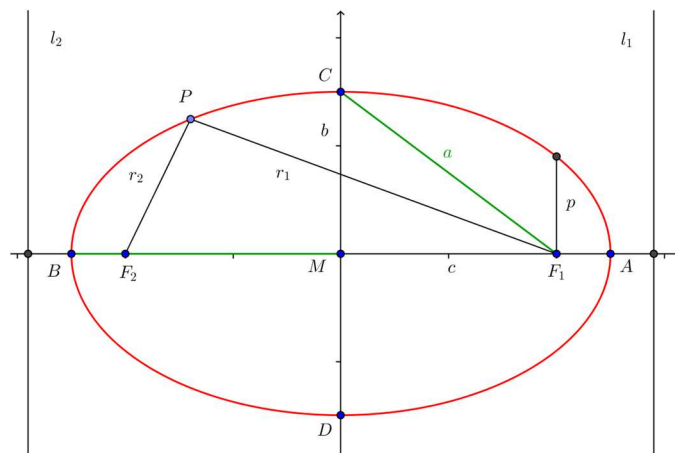
Bezeichnungen:

M	Mittelpunkt der Strecke $\overline{F_1F_2}$
$F_1, F_2$	Brennpunkte
A, B	Hauptscheitel
C, D	Nebenscheitel
$\overline{MA} = \overline{MB} = a$	grosse Halbachsen
$\overline{MC} = \overline{MD} = b$	kleine Halbachsen
$\overline{MF_1} = \overline{MF_2} = c$	lineare Exzentrizität
$\varepsilon = \frac{c}{a}$	numerische Exzentrizität

Nach Pythagoras gilt:

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad 2.1.3$$

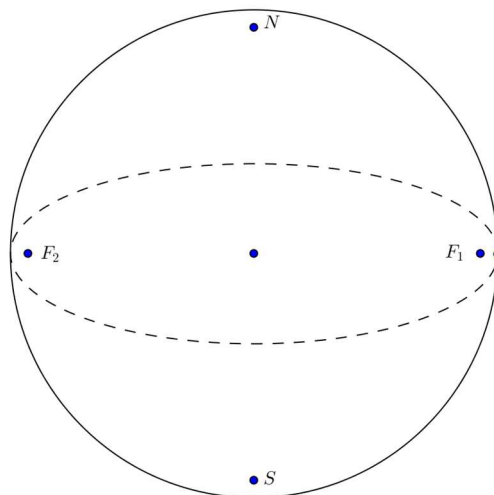
Im Spezialfall  $c = 0$  ergeben sich Kreise.



2.1.2

Eine Anwendung:

Wird die Erde als Kugel in Normalprojektion korrekt gezeichnet, dann gehen Nordpol N und Südpol S aus den um  $90^\circ$  gedrehten Brennpunkten  $F_1$  bzw.  $F_2$  der Äquatorellipse hervor.



## 2.2. Leitliniendefinition

In der Abbildung mit den Dandelinkugeln kann die Höhe  $h$  auf zwei verschiedene Arten berechnet werden:

wegen  $\overline{PP_1} = \overline{PF_1}$  gilt (Abschnitte auf den Kugeltangenten)

$$h = \overline{PP_1} \cdot \cos \alpha = \overline{PF_1} \cdot \cos \alpha$$

und im schraffierten Dreieck

$$h = \overline{Pl_1} \cdot \cos \beta$$

Gleichsetzen ergibt

$$\overline{PF_1} \cdot \cos \alpha = \overline{Pl_1} \cdot \cos \beta$$

oder

$$\frac{\overline{PF_1}}{\overline{Pl_1}} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \varepsilon < 1$$

denn wegen  $\beta > \alpha$  ist  $\cos \beta < \cos \alpha$

Definition der Ellipse (Leitliniendefinition)

Gegeben sind ein Punkt  $F$  (Brennpunkt) und eine Gerade  $l$  (Leitgerade) und ein Zahl  $\varepsilon$ .

Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte  $P$ , deren Abstandsverhältnis von  $F$  und von  $l$  den konstanten Wert  $\varepsilon < 1$  hat.

## 2.3 Die Koordinatengleichung der Ellipse

Ein beliebiger Ellipsenpunkt

$P(x, y)$  erfüllt die Ortsbedingung:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = r_1 + r_2 = 2a$$

$$\text{also } r_1 = 2a - r_2$$

oder quadriert

$$r_1^2 = 4a^2 - 4ar_2 + r_2^2$$

und umgeformt

$$4ar_2 = 4a^2 + r_2^2 - r_1^2 \quad (*)$$

wobei nach Pythagoras gilt:

$$r_{1,2} = \sqrt{(c \pm x)^2 + y^2}$$

Die auftretende Differenz  $r_2^2 - r_1^2$  kann zu  $4cx$  vereinfacht werden.

Dividiert man (\*) durch so erhält man

$$ar_2 = a^2 + cx$$

erneutes Quadrieren führt auf

$$a^2 r_2^2 = a^4 + 2a^2 cx + c^2 x^2$$

Einsetzen von  $r_2^2$  ergibt

$$a^2((x+c)^2 + y^2) = a^4 + 2a^2 cx + c^2 x^2$$

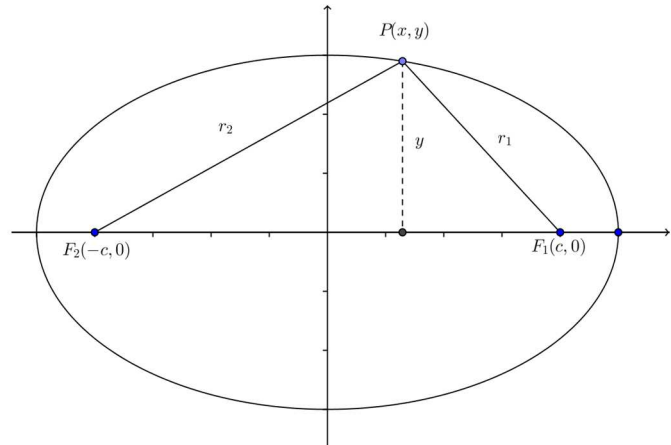
$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2 cx + c^2 x^2$$

$$(a^2 - c^2) \cdot x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Berücksichtigt man 2.1.3 so erhält man schliesslich

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ mit } b^2 = a^2 - c^2}$$



oder nach Ausmultiplizieren  
und Zusammenfassen

und nach Division durch  $a^2 b^2$

2.3.1

Ist umgekehrt 2.3.1 erfüllt, so gilt die Ortsbedingung  $r_1 + r_2 = 2a$ .

Beispiel:

Die Gleichung  $9x^2 + 25y^2 = 225$  kann umgeformt werden zu

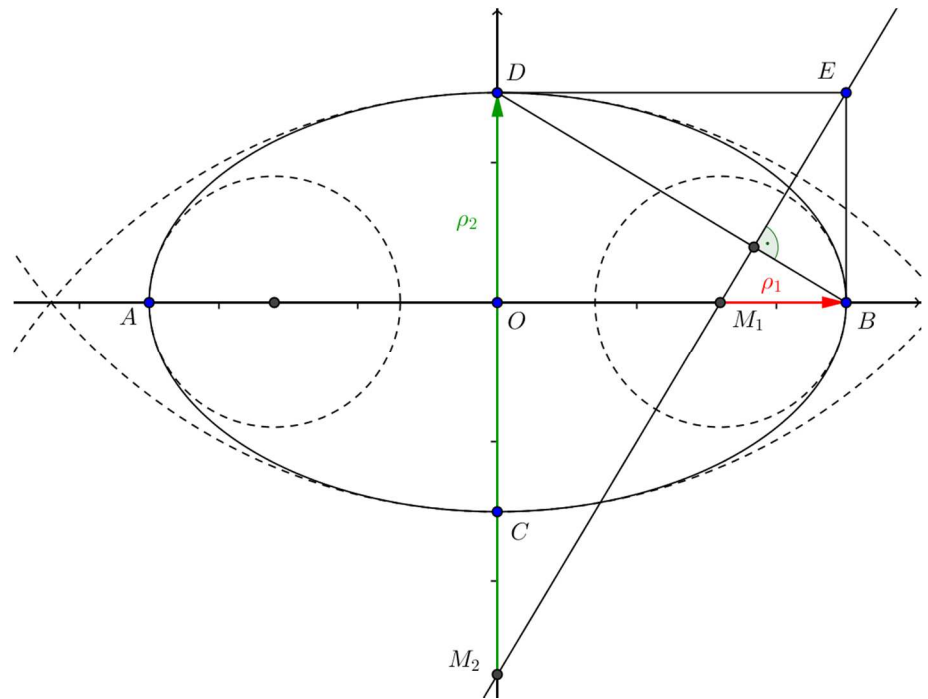
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Die Gleichung stellt also eine Ellipse mit der grossen Halbachse  $a = 5$  und der kleinen Halbachse  $b = 3$  dar. Wegen  $b^2 = a^2 - c^2$  oder  $c^2 = a^2 - b^2 = 16$  ist  $c = 4$  (vgl. die Abbildung oben)

## Scheitelkrümmungskreise

In der Umgebung der Scheitelpunkte kann die Ellipse durch die sogenannten Scheitelkrümmungskreise mit den Mittelpunkten  $M_1$  und  $M_2$  und den Radien  $\rho_1 = \frac{b^2}{a}$  und  $\rho_2 = \frac{a^2}{b}$

Bei der Konstruktion verwendet man die Ähnlichkeit der Dreiecke  $M_1BE$  bzw.  $BED$ .



## 2.4. Die Ellipse als Normalriss eines Kreises

Ein gegebener Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$  in der zweitprojizierenden Ebene  $\varepsilon$  wird senkrecht in die Grundrissebene projiziert.

Der Kreis um den horizontalen Durchmesser durch  $M$  wird in die zur Grundrissebene parallele Ebene durch  $M$  gedreht. Die Drehkreisbogen erscheinen im Grundriss als Strecken. Dreht man zusätzlich die Kreistangente in  $P$  mit, so erhält man die Tangente im Ellipsenpunkt  $P'$ , denn der Punkt auf der  $x$ -Achse ist ein Fixpunkt.

Die Abbildungsgleichungen lauten:

$$x_1 = x$$

$$y = y_1 \cdot \cos \alpha \quad \text{oder} \quad y_1 = \frac{y}{\cos \alpha} \quad 2.4.1$$

Setzt man diese Werte in die Kreisgleichung

$x_1^2 + y_1^2 = r^2$  ein, so ergibt sich nach

Division durch  $r^2$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{(r \cos \alpha)^2} = 1$$

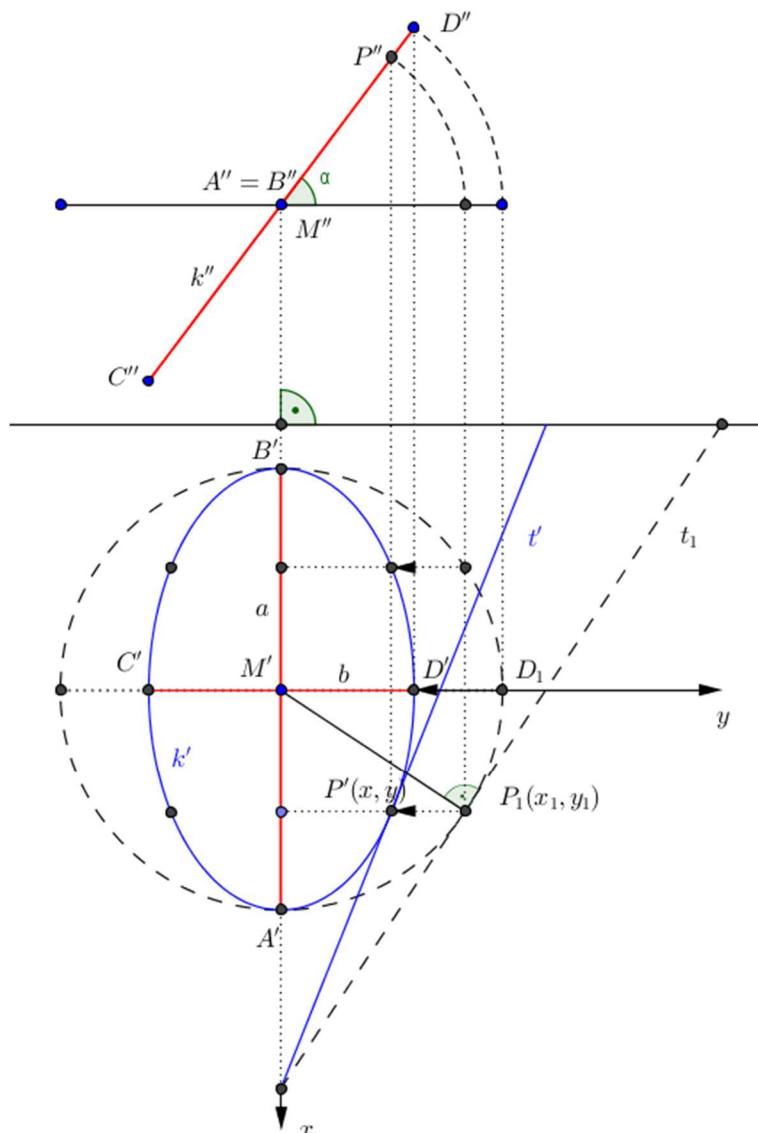
Setzt man  $a = r$  und  $b = r \cos \alpha$  so

ergibt sich erneut die Ellipsengleichung

2.3.1.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Damit ist gezeigt:



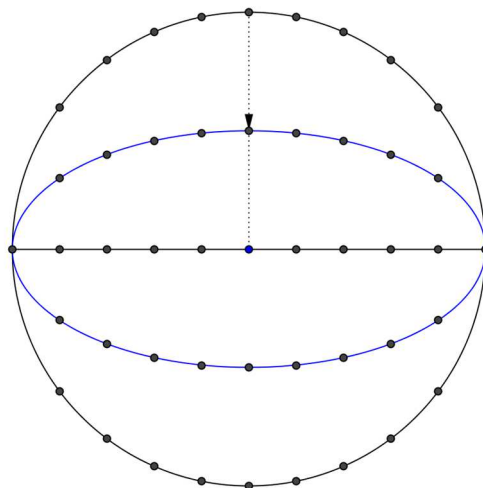
**Satz:**

Der Normalriss (das normalaffine Bild) eines Kreises ist eine Ellipse. Die Länge der Hauptachse ist gleich dem unverkürzten Kreisdurchmesser.

Die Aussage dieses Satzes kann auch folgendermassen formuliert werden:

**Satz von Archimedes:**

Werden alle zu einem Durchmesser normalen Sehnen eines Kreises von der Mitte ausgehend in einem festen Verhältnis verkürzt, so liegen die neuen Endpunkte auf einer Ellipse.



In der Abbildung ist das Verkürzungsverhältnis  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

## 2.5 Ellipsenkonstruktionen

Unter der Aufgabe, eine Ellipse zu konstruieren, versteht man die Konstruktion ihrer Achsen und eines beliebigen Punktes mit der Tangente. Diese Aufgabe kann mit der folgenden Zweikreisekonstruktion nach de la Hire gelöst werden.

### 2.5.1 Fähnchenkonstruktion nach de la Hire

Gegeben sind die Ellipsenachsen.  
Gesucht ist ein Ellipsenpunkt P bzw. Q und die Tangente in Q.

Man betrachtet dazu den Hauptscheitelkreis (Radius a) und den Nebenscheitelkreis (Radius b), und zeigt, dass die Koordinaten von P die Ellipsengleichung erfüllen.

Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{\overline{P_1 R}}{\overline{P R}} = \frac{y_1}{y} = \frac{\overline{P_1 M}}{\overline{P_2 M}} = \frac{a}{b}$$

also

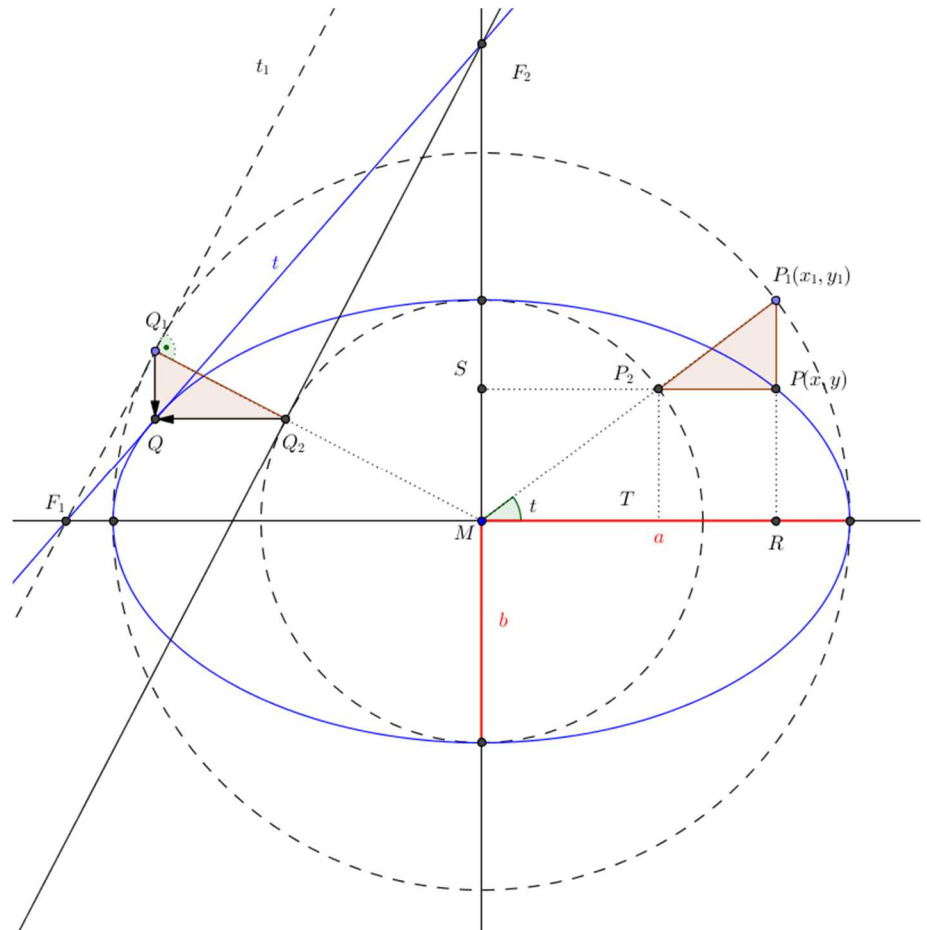
$$y_1 = \frac{a}{b} \cdot y \quad (*) \quad \text{und} \quad x_1 = x$$

Da  $P_1$  auf dem Hauptscheitelkreis liegt gilt:

$$x_1^2 + y_1^2 = x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2 \quad \text{und}$$

damit nach Division durch  $a^2$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Geht man vom Nebenscheitelkreis aus, so kann wegen (\*) im Satz von Archimedes „verkürzt“ durch „verlängert“ ergänzt werden.

Zur Tangentenkonstruktion in Q:

Die Kreistangente in  $t_1$  bzw. in  $t_2$  gehen bei der normalen Affinität in die Ellipsentangente in Q über. Die Punkte auf den Koordinatenachsen sind Fixpunkte. Damit ist gezeigt, dass Ellipsenkonstruktionen auf Kreiskonstruktionen zurückgeführt werden können.

Führt man den Polarwinkel  $t$  ein, so ergibt sich aus

$$\text{Dreieck } MRP_1: \quad \frac{x}{a} = \cos t \quad \text{bzw.} \quad \text{Dreieck } MTP_2 \quad \frac{y}{b} = \sin t \quad \text{und damit die}$$

### Parameterdarstellung der Ellipse

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi & & 2.5.2 \\ y &= b \cdot \sin t \end{aligned}$$

Quadriert man die beiden Gleichungen so erhält man nach Addition der beiden Seiten  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  erneut die Ellipsengleichung 2.3.1.

Ergänzt man in der Figur das Fähnchen  $P_2PP_1$  zu einem Rechteck, so ergibt sich daraus unmittelbar die sogenannte

### 2.5.3 Papierstreifenkonstruktion nach Proclus (410 – 495)

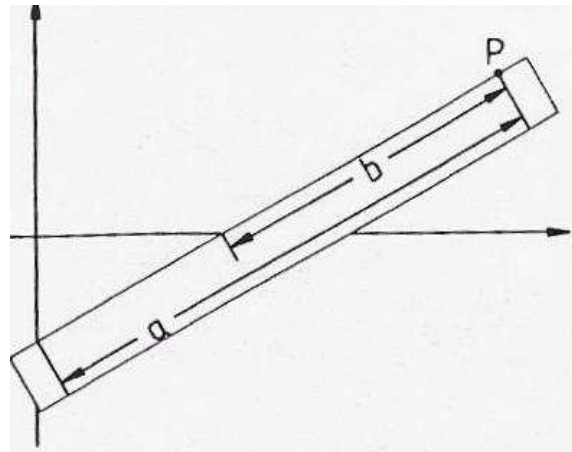
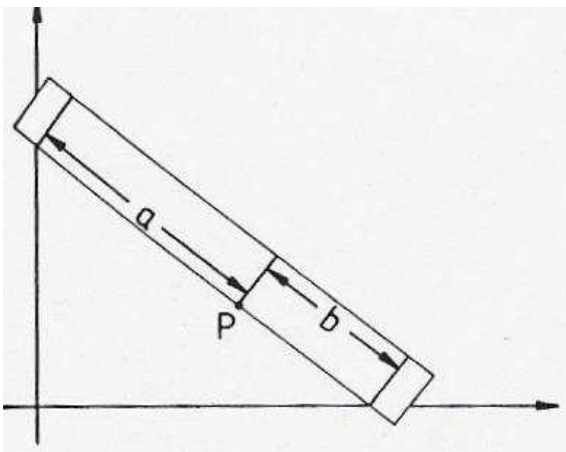
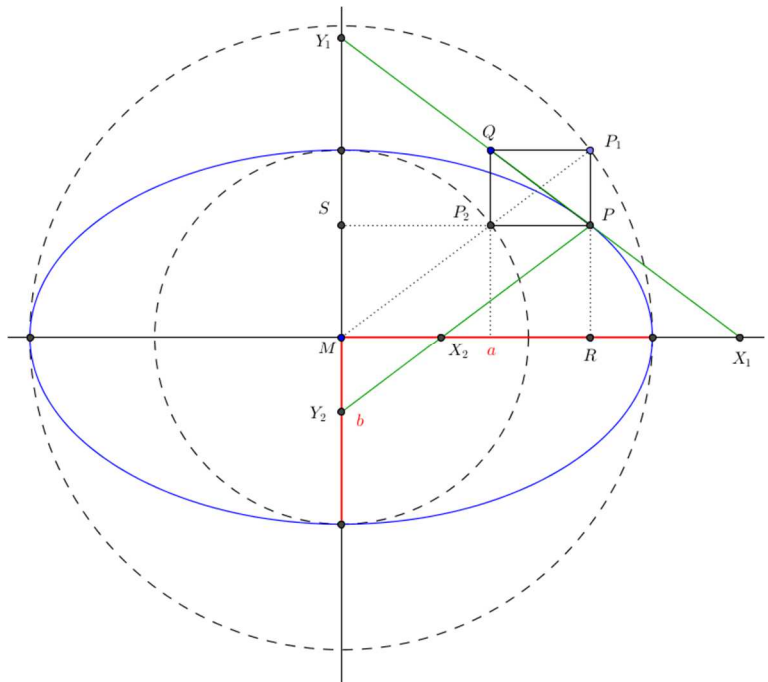
$$\overline{MP_1} = \overline{Y_1P} = \overline{Y_1P} = a$$

und

$$\overline{MP_2} = \overline{Y_1Q} = \overline{X_2P} = \overline{X_1P} = b$$

Wird ein Papierstreifen so bewegt, dass  $X_1$  und  $Y_1$  (bzw.  $X_2$  und  $Y_2$ ) auf den Achsen bleiben, so beschreibt  $P$  eine Ellipse.

Der Ellipsenzirkel ist eine Anwendung dieser Idee.



Hauptanwendung dieser Konstruktion ist die Konstruktion der fehlenden Halbachse, wenn ein Ellipsenpunkt gegeben ist.

### Übungsaufgaben:

a)

Von einer Ellipse kennt man die grosse Achse

$A(-5, 0)$  und  $B(5, 0)$  und den Punkt  $P(3, 2)$ .

a)

Wie kann die kleine Achse zeichnerisch und rechnerisch bestimmt werden?

b)

In welchem Punkt  $Q$  schneidet eine beliebige Gerade  $g$  durch  $P$  die Ellipse?

Lösung:

rechnerische Lösung von a) mit dem Ansatz:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$P(3, 2)$  erfüllt die Ellipsengleichung:

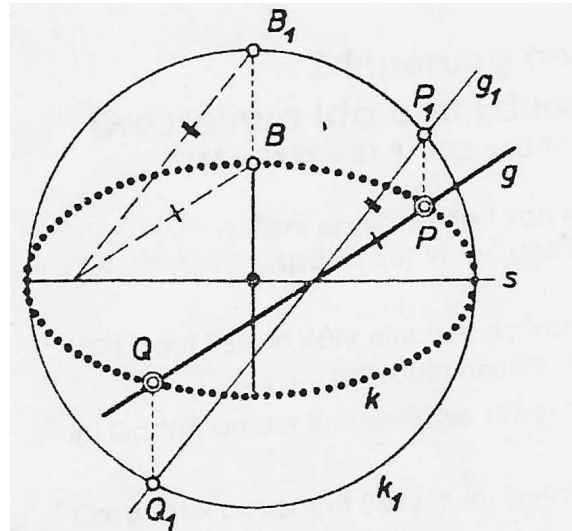
$$\frac{3^2}{5^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1$$

Mit der Lösung

$$b = \frac{5}{2}$$

konstruktive Lösung von a) b)

vgl. die Abbildung.



## 2.5.4 Ellipsentangenten

Definition:

Eine Gerade heisst Tangente der Ellipse, wenn sie mit dieser genau einen Punkt gemeinsam hat. Der gemeinsame Punkt heisst Berührungspunkt.

Die Ortslinieneigenschaft der Ellipse verhilft zu der folgenden einfachen Tangentenkonstruktion:

Satz:

Die Tangente in einem Ellipsenpunkt ist die Senkrechte zur Halbierenden des Winkels, den die zugehörigen Brennstrahlen bilden.

Beweis:

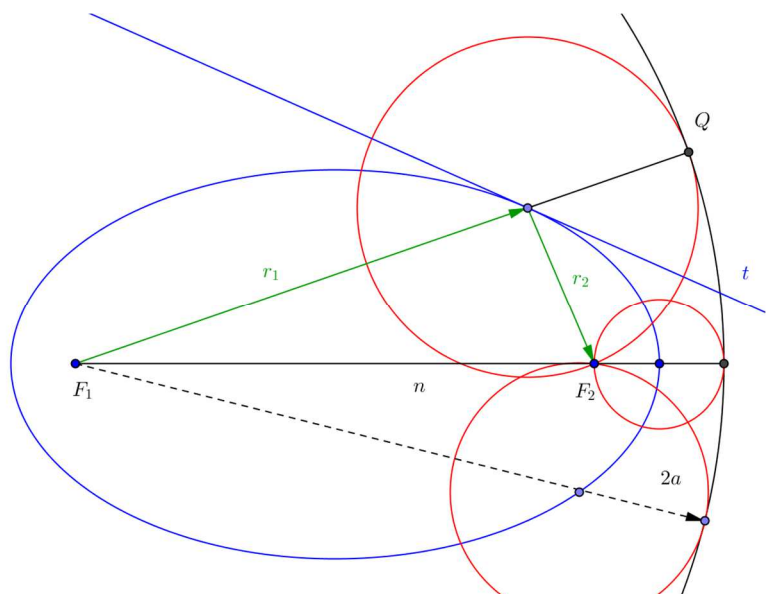
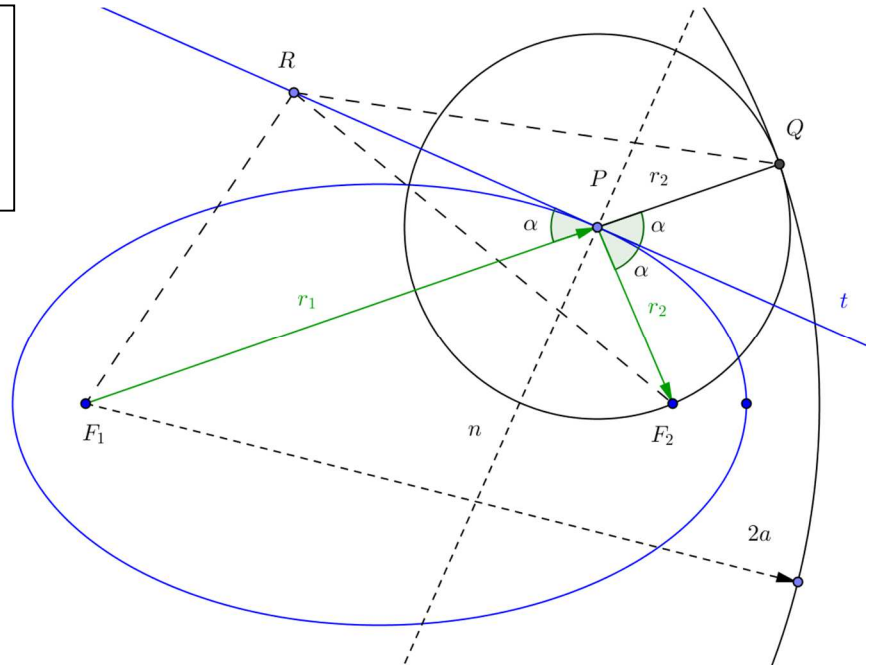
P sei ein beliebiger Ellipsenpunkt. Verlängert man  $r_1 = \overline{F_1P}$  über P hinaus um  $r_2$  bis Q und zeichnet die Winkelhalbierende t des entstehenden Winkels QPF<sub>2</sub>, so kann auf t ausser P kein weiterer Ellipsenpunkt liegen. Für jeden andern Punkt R auf t gilt nämlich:

$$\overline{F_1P} + \overline{RF_2} = \overline{F_1R} + \overline{RQ} \geq r_1 + r_2$$

denn es ist  $\overline{RF_2} = \overline{RQ}$  weil t nicht nur Winkelhalbierende, sondern auch Mittelsenkrechte von  $\overline{F_2Q}$  ist. t ist also Ellipsentangente. Die Normale n halbiert daher den Winkel  $F_1PF_2$ . Für jeden Ellipsenpunkt gilt damit:

Von F<sub>1</sub> ausgehende Lichtstrahlen werden so an der Ellipse gespiegelt, dass sie nach der Spiegelung durch F<sub>2</sub> gehen. Von daher erklärt sich der Name Brennpunkte der Ellipse.

Die Skizze kann ausserdem folgendermassen interpretiert werden: Wählt man einen beliebigen Ellipsenpunkt als Mittelpunkt eines Kreises PF<sub>2</sub>, dann geht er einerseits durch den festen Punkt F<sub>2</sub>, andererseits berührt er den Kreis um F<sub>1</sub> mit Radius 2a in Q.



### 2.5.5 Das Bild eines Kreises bei einer schiefen Affinität

Das schiefaffine Bild eines Kreises ist ebenfalls eine Ellipse, zwei senkrecht aufeinander stehende Kreisdurchmesser werden in konjugierte Ellipsendurchmesser abgebildet. Aus zwei konjugierten Ellipsendurchmessern können nach Rytz die Achsen konstruiert werden.

Das Bild eines Kreises ist auch bei einer schiefen Parallelprojektion ist eine Ellipse (ohne Beweis)

Als Beispiel sind eine Doppeltüre mit kreisförmigen Glaseinsatz und ihr Schlagschatten auf den Boden bei paralleler Beleuchtung dargestellt.

Von der Bildellipse können acht Punkte mit den Tangenten konstruiert werden. Die Tangente in 1 und 5 sind zum Durchmesser 37 parallel. Wegen der Parallelentreue der Projektion bleibt diese Eigenschaft bei der Abbildung erhalten. Damit sind die Ellipsentangente in  $1'$  und  $5'$  zum Durchmesser  $3'7'$  parallel.

Im Allgemeinen werden zwei senkrecht aufeinander stehende Kreisdurchmesser nicht in senkrecht aufeinander stehende Kreisdurchmesser abgebildet. Dies führt zur folgenden

Definition:

Zwei Ellipsendurchmesser heißen konjugiert, wenn jeder Durchmesser parallel ist zu den Tangenten in den Endpunkten des andern.

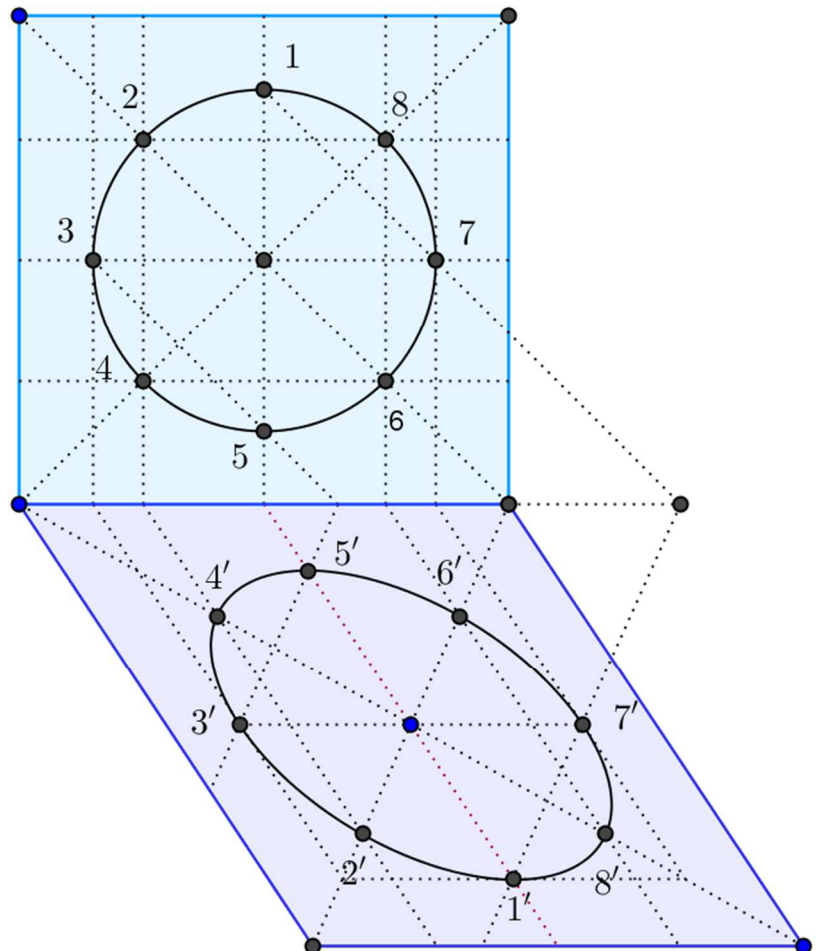
Wegen der Parallelentreue der Affinität gilt deshalb:

Die Tangenten in den Endpunkten eines Ellipsendurchmessers sind parallel zum konjugierten Durchmesser. Die Ellipsenachsen sind das einzige Paar konjugierter Durchmesser, die einen rechten Winkel einschließen.

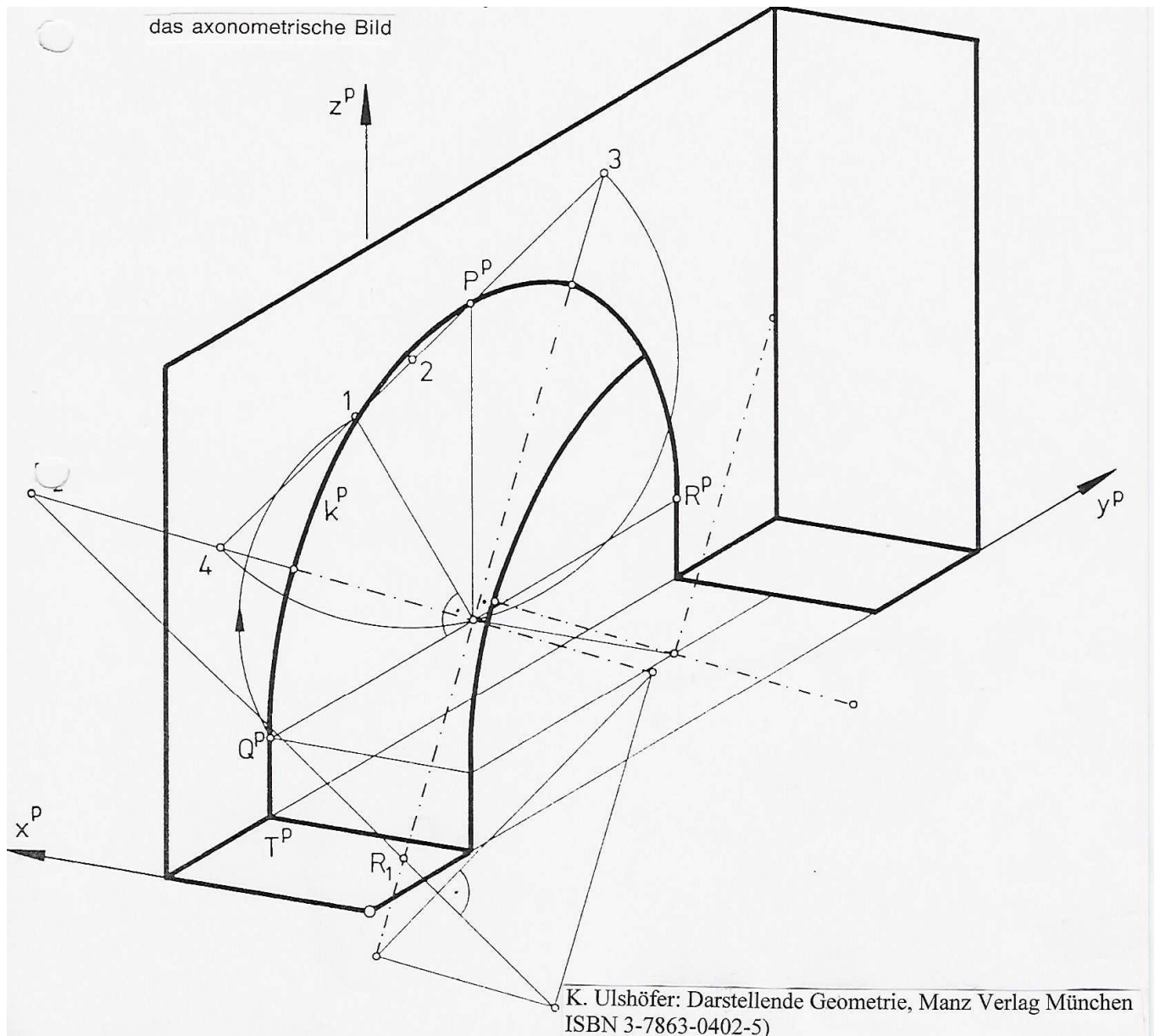
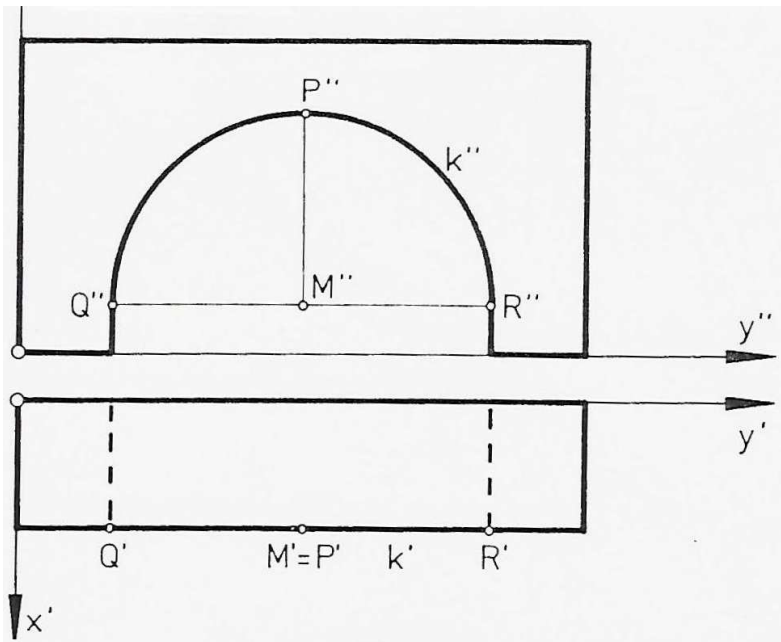
Damit stellt sich das Problem, wie die Achsen der Ellipse bestimmt werden können, wenn zwei konjugierte Ellipsendurchmesser bekannt sind. Dies ermöglicht die sogenannte Rytz'sche Achsenkonstruktion.

Im folgenden Beispiel ist ein Kinderbauklotz axonometrisch dargestellt

Die **Axonometrie** ist ein Verfahren in der darstellenden Geometrie, um relativ einfach räumliche Objekte in einer Zeichenebene darzustellen. Hierbei verwendet man die Koordinaten wesentlicher Punkte und die Bilder der drei Koordinatenachsen in einer Zeichenebene. Das Resultat ist für jede Wahl der Bildachsen bis auf eine Skalierung eine Parallelprojektion (Satz von Polke). Im Allgemeinen ergibt sich eine schiefe (oder schräge) Parallelprojektion (Wikipedia).



Kinderbauklotz in Grund- und Aufriss



## 2.6.Rechnerische Bestimmung der Ellipsentangente

Das Problem kann rechenaufwändig mit der Diskriminantenmethode gelöst werden mit dem folgenden Ergebnis:

Satz:

Die Gerade mit der Gleichung  $y = mx + q$  ist Tangente an die Ellipse, wenn gilt:  $q^2 = a^2m^2 + b^2$  (ohne Beweis)

Satz:

Die Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  hat im Punkt  $P(x_1, y_1)$  die Tangente  $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$  2.6.1

Beweis:

Da die Ellipse das normalaffine Bild eines Kreises ist, kann die Ellipsentangente als Bild der entsprechenden Kreistangente aufgefasst werden.

Gleichung der Kreistangente  $x_1x + y_1y = a^2$

Setzt man die Abbildungsgleichungen der normalen Affinität 2.4.1:

$$y_1 = \frac{a}{b} \cdot y$$

$$x_1 = x$$

in die Gleichung der Kreistangente ein so erhält man

$$x_1x + \frac{a}{b} \cdot y_1 \cdot \frac{a}{b} \cdot y = a^2 \text{ und nach Multiplikation mit } a^2 \text{ wie behauptet}$$

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

Aufgabe:

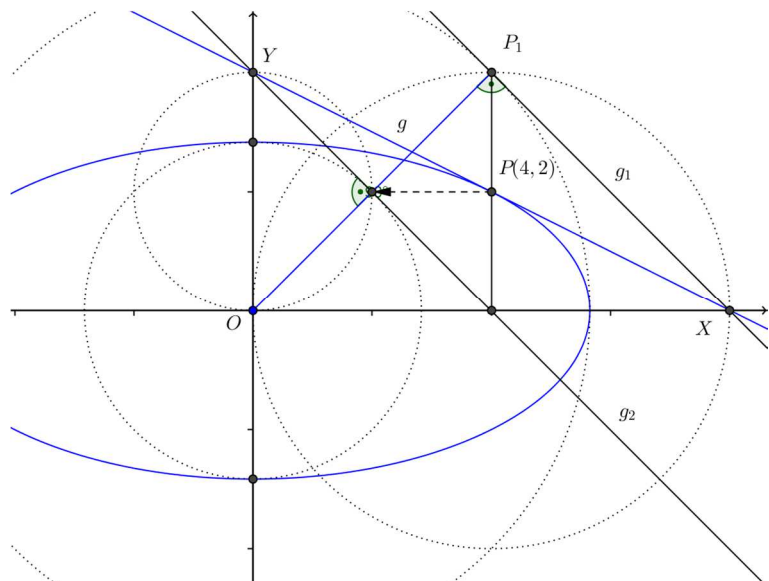
Die Gerade  $g: x + 2y = 8$  berührt die Ellipse in Normallage im Punkt  $P(x, 2)$ .

Wie können a) konstruktiv und b) rechnerisch die Halbachsen bestimmt werden?

a)

Lösung durch Konstruktion:

Die Ellipsentangente  $g$  geht bei der normalen Affinität zur  $x$ -Achse in die Kreistangente  $g_1$  über.  $X$  ist Fixpunkt. Der Berührungspunkt  $P_1$  liegt auf dem Thaleskreis über  $OX$ . Damit ist die grosse Halbachse bestimmt. Die kleine Halbachse ergibt sich z.B. mit der Föhnchenkonstruktion.



b)

Die Koordinaten von P erfüllen die Geradengleichung womit  $x = 4$  ist.

Da die Gleichungen  $x + 2y = 8$  und  $\frac{4}{a^2} \cdot x + \frac{2}{b^2} \cdot y = 1$  bzw. nach Multiplikation mit 8

$\frac{4 \cdot 8}{a^2} \cdot x + \frac{2 \cdot 8}{b^2} \cdot y = 8$  dieselbe Gerade darstellen folgt

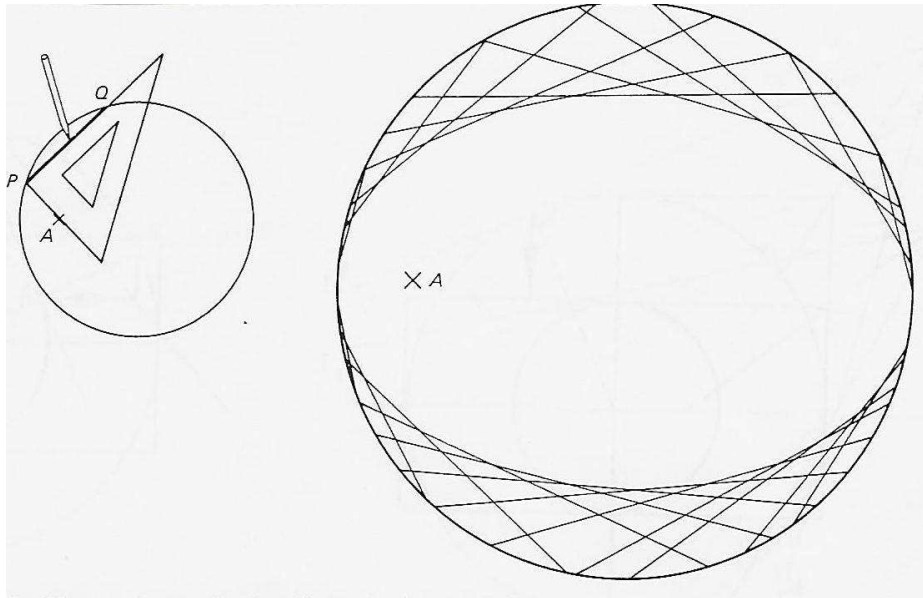
$$1 \cdot x + 2 \cdot 1 \cdot y = 8$$

$$\frac{32}{a^2} \cdot x + 2 \cdot \frac{8}{b^2} \cdot y = 8$$

mit Koeffizientenvergleich  $a^2 = 32, b^2 = 8$ .

## 2.7 Die Ellipse als Hüllkurve

Gegeben ist ein Kreis und im Innern ein Punkt A. Legt man durch einen Kreispunkt die Sehne, die auf der Geraden PA senkrecht stehen, dann umhüllen diese Sehnen eine Ellipse (ohne Beweis)



## 2.8 Der Flächeninhalt einer Ellipse

Die Ellipse kann als normalaffines Bild des Kreises aufgefasst werden. Affinitätsachse ist die grosse Achse. Da bei einer Affinität das Flächenverhältnis gleich dem Affinitätsverhältnis ist gilt für den Flächeninhalt der Ellipse:

$$I_E = I_K \cdot \frac{b}{a} = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$$

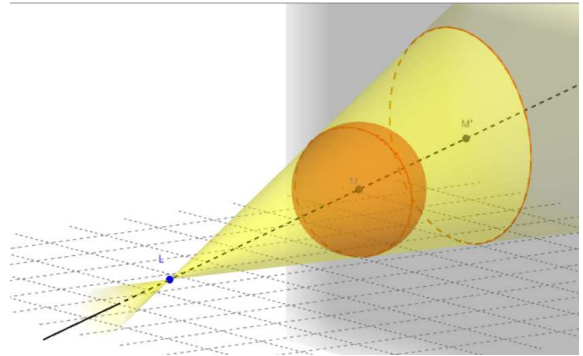
2.8.1

## 2.9 Kegelschnitte in der Umwelt

### 2.9.1 Schlagschatten

Bei Zentralbeleuchtung (mit genügend grossem Abstand der Lichtquelle wirft eine Kugel auf eine schattenfangende Ebene einen elliptischen Schlagschatten. Die Lichtstrahlen, welche die Kugel (Dandelinkugel) berühren, bilden einen Kegel.

Analog folgt, dass der Schlagschatten einer Kugel bei Parallelbeleuchtung ebenfalls Ellipsenform hat (Wasseroberfläche in einem geneigten Glasbecher, schräg aufgeschnittene Wurst).



### 2.9.2 Petersplatz

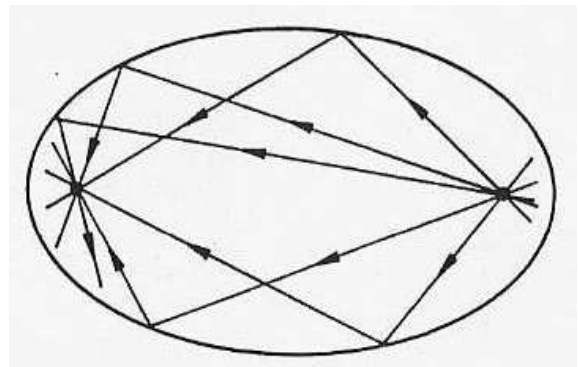
Der von Bernini erbaute Petersplatz in Rom hat elliptische Form mit den Halbachsen  $a = 170$  m und  $b = 120$  m. Er wird von je zwei halbkreisförmigen vierfachen Kolonnaden mit 284 Säulen und 88 Pfeilern eingefasst. Links und rechts der Platzmitte sind zwei Punkte, die Brennpunkte der Ellipse markiert. Von diesen Stellen aus sind nur die vordersten der vier Säulen sichtbar.



### 2.9.3 Reflexion an einer Ellipse

Bei der Konstruktion der Ellipsentangente wurde bereits erwähnt, dass Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, an der Ellipse so reflektiert werden, dass sie durch den andern Brennpunkt gehen.

Anwendungen dieser Eigenschaft ergeben sich bei der Flüstergalerie (Sprecher und Zuhörer befinden sich in den Brennachsen eines Raumes mit elliptischem Grundriss) oder beim Nierensteinertrümmerer. In einem Brennpunkt erzeugte Stosswelle treffen sich im andern Brennpunkt und zerstören dort den Nierenstein.



## 2.9.4 Kepler'sche Gesetze

(Johannes Kepler, 1571 – 1630)

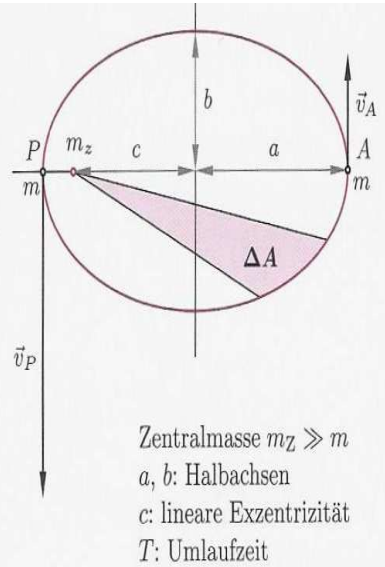
I Bahnkurve: Ellipse mit  $m_z$  in einem der beiden Brennpunkte  
S. 108 ◀ Ellipse

II Flächensatz:  $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{konst.}$   
 $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}(a-c)v_P = \frac{1}{2}(a+c)v_A = \frac{\pi ab}{T}$

III  $\frac{a^3}{T^2} = \frac{Gm_z}{4\pi^2} = \text{konst.}$

Aphel A: sonnenfernster Punkt

Perihel P: sonnennächster Punkt



1. Gesetz: Die Planetenbahnen sind elliptisch, in einem Brennpunkt steht die Sonne.

Für die Erde gilt mit P als Perihel (sonnennächster Punkt) und A als Aphel (sonnenfernster Punkt)

$\overline{SP} = 147 \cdot 10^6 \text{ km}$  (2. Januar)

$\overline{SA} = 152 \cdot 10^6 \text{ km}$  (2. Juli)

Daraus folgt für grosse Achse bzw. lineare Exzentrizität

$a = 149.5 \cdot 10^6 \text{ km}$  und  $e = 2.5 \cdot 10^6 \text{ km}$  und damit  $\varepsilon = \frac{e}{a} \approx \frac{25}{1495} \approx \frac{1}{60}$

Die Erdbahn ist also nahezu kreisförmig

Im Gegensatz dazu ist etwa die Bahn des Kometen Halley ausgeprägt elliptisch mit  $\varepsilon \approx 0.967$

und  $a \approx 2670 \cdot 10^6 \text{ km}$ . Die Umlaufzeit beträgt etwa 77 Jahre. 1986 erreichte er seinen Perihel mit etwa  $88 \cdot 10^6 \text{ km}$ .

Auch künstliche Satelliten folgen den Keplerschen Gesetzen. Ihr Brennpunkt liegt im Erdmittelpunkt (Sputnik 1957 mit  $\varepsilon \approx 0.62$ ) oder im Mittelpunkt der Venus.

## 2.10 Keplers Problem

(nach Ralph Strebel)

Johannes Kepler erarbeitete 1609 ein Modell zur Bewegung der Planeten. Dabei stiess er auf die folgende Keplersche Gleichung:

$$u - \varepsilon \cdot \sin u = \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

2:10.1

Dabei  $T$  die Umlaufszeit und  $\varepsilon$  die numerische Exzentrizität der Ellipsenbahn des Planeten bedeutet,  $t$  gibt die Zeit an, die verstrichen ist seit er zur Zeit  $t = 0$  den sonnennächsten Punkt verlassen hat.

Längeneinheit ist die grosse Halbachse der Erdbahn, astronomische Einheit genannt rund  $149.6 \cdot 10^6 \text{ km}$ .

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \approx \frac{25}{1495} \approx \frac{1}{60}$$

Herleitung der Keplerschen Gleichung 2.10.1

Zur Zeit  $t$  befindet sich der Planet im Punkt  $P(t)$ . Der Fahrstrahl hat zu dieser Zeit die Fläche  $A(t)$  überstrichen.

Sie entspricht geometrisch dem krummlinig begrenzten Dreieck  $FP(0)P(t)$  (blau gefärbt).

Da nach dem zweiten Keplerschen Gesetz der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht ist  $A(t)$  zur Zeit  $t$  proportional, d.h. es gilt:

$A(t) = k \cdot t$ . Nach der halben Umlaufszeit hat der Fahrstrahl die halbe Ellipsenfläche überstrichen, d.h. es gilt:

$$A\left(\frac{T}{2}\right) = k \cdot \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \cdot kT = \frac{1}{2} \cdot \pi ab$$

Damit ist  $k$  bestimmt zu

$$k = \frac{\pi ab}{T}$$

Und es gilt:

$$A(t) = \frac{\pi ab}{T} \cdot t$$

2.10.2

$A(t)$  kann auch elementargeometrisch berechnet werden. Das krummlinig begrenzte Dreieck  $FP(0)P(t)$  kann als normalaffines Bild des krummlinig begrenzten Dreiecks  $FP(0)P_1(t)$  aufgefasst werden. Da das Flächenverhältnis gleich dem Affinitätsverhältnis  $\frac{b}{a}$  ist, haben  $P_1$  und  $P$  die folgenden Koordinaten:

$$P_1(x_1, y_1) \text{ und } P_1\left(x_1, \frac{b}{a} \cdot y_1\right).$$

Die Fläche des krummlinig begrenzten Dreiecks  $FP(0)P_1(t)$  kann bestimmt werden, indem man von der Fläche des Sektors  $OP(0)P_1(t)$  die Fläche des Dreiecks  $OP_1(t)$  (grün) subtrahiert.

$$A(t) = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot au - \frac{1}{2} \cdot ae \cdot a \sin u\right) = \frac{ab}{2} \cdot (u - e \cdot \sin u) = \frac{ab}{2} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

Auf der rechten Seite steht eine normierte Zeit, die mit  $\tau$  (mittlere Anomalie) bezeichnet wird.

Damit gelangt man zur folgenden Keplerschen Gleichung

$$u - e \cdot \sin u = \tau$$

2.10.3

Die Keplersche Gleichung ermöglicht die Berechnung mittleren Anomalie  $\tau$  aus der exzentrischen Anomalie  $u$ . In einem kartesischen Koordinatensystem kann die Bahn des Planetenbahn in der folgenden Parameterform dargestellt werden

$$u \rightarrow (a \cdot \cos u, b \cdot \sin u)$$

dargestellt werden.

Der Winkel  $P(0)FP(t)$  wird mit  $w$  bezeichnet und heisst wahre Anomalie. Er berechnet sich zu

$$\cos w = \frac{\cos u - e}{1 - e \cdot \cos u}$$

