Komplexe Zahlen

1. Gauss'sche Ebene, Elementare Operationen

Der Aufbau des Zahlensystems:

Ausgangsbereich	Problem	Lösung	neuer Zahlentyp	erweiterter Zahlenbereich
N nat. Zahlen	x + 3 = -1	x = -1	neg. Zahlen, 0	ganze Zahlen **Z**
Z ganze Zahlen	2·x = 1	$x = \frac{1}{2}$	Brüche	rationale Zahlen **Q**
Q rat. Zahlen	$x^2 = 3$	$x = \pm\sqrt{3}$	irrationale Zahlen	reelle Zahlen **R**
R reelle Zahlen	$x^2 = -3$	$x = \pm\sqrt{3} \cdot i$	imaginäre Zahlen	komplexe Zahlen **C**

Bei diesen Erweiterungen des Zahlenbereichs bleiben die bisher gültigen Rechenregeln (z.B. Kommutativität, Assoziativität erhalten). Es lässt sich zeigen, dass dieser Prozess der Erweiterung nicht mehr weitergeführt werden kann, ohne dass wichtige Rechenregeln verloren gehen.

Da die Gleichung $x^2 = -1$ hat im Bereich der reellen Zahlen **R** keine Lösung hat führt man die Zahl i ein mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. i heisst imaginäre Einheit.

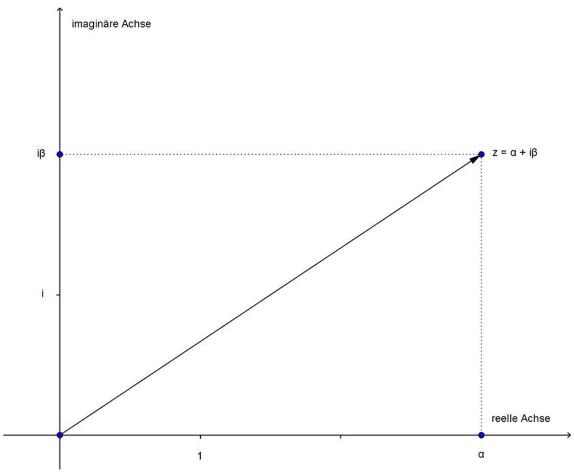
Zahlen der Form $z = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in$ **R** heissen komplexe Zahlen
α heisst Realteil von z oder Re (z),
β Imaginärteil von z, kurz Im (z).

Beispiele:

z = 2 - 3i, $\quad z = \frac{1}{3} - \sqrt{2} \cdot i$

Für reelle Zahlen ist $\beta = 0$, komplexe Zahlen mit $\alpha = 0$ heissen rein imaginär.

Die Bilder der reellen Zahlen füllen die Zahlengerade lückenlos. Jeder komplexen Zahl $z = \alpha + \beta i$ kann jedoch umkehrbar eindeutig ein Punkt P in der sogenannten Gauss'schen Ebene nach Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) dem sogenannten „Princeps Mathematicorum" zugeordnet werden.
(Skizze: z = 3 + 2i)



Unter dem absoluten Betrag |z| der komplexen Zahl z versteht man $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
Geometrische Interpretation: Abstand des zugehörigen Punktes vom Nullpunkt.
(Skizze: $|z| = \sqrt{13}$)

$\bar{z} = \alpha - \beta i$ heisst die zu z = α + βi konjugiert komplexe Zahl (conjungere, verbinden). Die zu z und $\bar{z}$ gehörigen Punkte liegen symmetrisch zur reellen Achse.

Beispiel:
Die zu z = 2 - 3i konjugiert komplexe Zahl ist $\bar{z} = 2 + 3i$.

Jeder komplexen Zahl z = α + βi entspricht
- ein reelles Zahlenpaar (α , β)
- ein Punkt in der Gauss'schen Ebene
- ein Vektor, der den Nullpunkt mit diesem Punkt verbindet

Bemerkung 1:
Gegen Ende des 18. Jahrhunderts argumentierte Leonhard Euler: „Weil alle Zahlen, die man sich vorstellen kann, entweder grösser oder kleiner als Null oder Null selbst sind, so ist klar, dass Elemente, deren Quadrate Negativzahlen sind, nicht einmal zu den möglichen Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen, dass sie unmögliche Zahlen sind. Solche Zahlen werden als eingebildete oder imaginäre Zahlen bezeichnet, weil sie bloss in der Einbildung vorhanden sind.“

Die imaginären Zahlen sind ein wunderbarer Geistesflug Gottes; sie sind wie Amphibien, die sich zwischen Sein und Nichtsein aufhalten (Leibniz).

Bemerkung 2:
Das gewählte Vorgehen bei der Einführung von i ist nicht unproblematisch, wie das folgende Beispiel zeigt:
Führt man eine Zahl j ein für die gilt: $0 \cdot j = 1$ so führt dies auf einen Widerspruch:
Einerseits gilt: $(0+0) \cdot j = 0 \cdot j = 1$
Andrerseits: $(0+0) \cdot j = 0 \cdot j + 0 \cdot j = 1 + 1 = 2$ Distributivgesetz
woraus der Widerspruch 1 = 2 folgt.

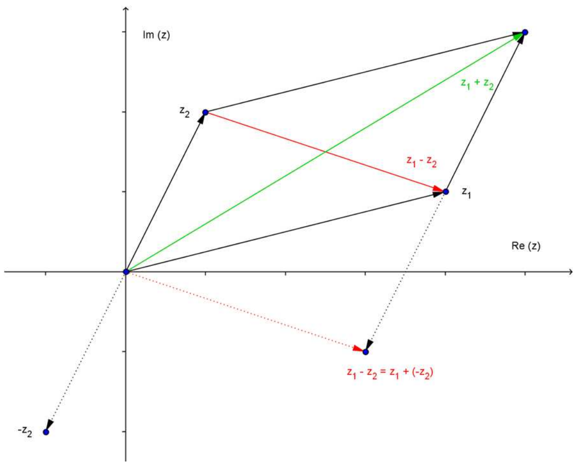
Eine mathematisch korrekte Einführung geschieht durch Zahlenpaare (α, β) mit α, β ∈ R, für die man Addition und Subtraktion einführt. Das Zahlenpaar (0,1) wird mit i identifiziert.

Im Gegensatz zu den reellen Zahlen können die komplexen Zahlen nicht mehr linear angeordnet werden, die Relationen >, <, .. verlieren ihre Bedeutung.

Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen

Die Rechengesetze für komplexe Zahlen werden so definiert, dass die Gesetze des Rechnens mit reellen Zahlen erhalten bleiben.

Die Addition (Subtraktion) zweier komplexer Zahlen wird als Addition (Subtraktion) der Real- bzw. Imaginärteile definiert. Geometrisch entspricht diesen Operationen die Vektoraddition bzw. Vektorsubtraktion der zugehörigen Ortsvektoren.
(Skizze: $z_1 = 4 + i$, $z_2 = 1 + 2i$).



Definition: $z_1 \pm z_2 = (\alpha_1 \pm \alpha_2) + i \cdot (\beta_1 \pm \beta_2)$

Bemerkung:

$|z_1 - z_2|$ ist gleich dem Abstand der Punkte z_1 und z_2.

Es gilt die Dreiecksungleichung

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

Beweis:

Jede Seite ist kleiner als die Summe der beiden andern:
$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
Jede Seite ist grösser als die Differenz der beiden andern:
$|z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2|$ und $|z_1 + z_2| \ge |z_2| - |z_1|$.

Multiplikation komplexer Zahlen

Beispiel:
$(3+4i)\cdot(2-2i) = 6-6i+8i-8i^2 = 14+2i$

allgemein:

$z_1 \cdot z_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$

Spezialfall:
$z \cdot \overline{z} = (\alpha + i\beta)\cdot(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 = |z|^2$

Damit kann der absolute Betrag in der folgenden Form dargestellt werden:
$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Division von komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen werden dividiert, indem man mit der konjugiert komplexen Zahl erweitert.

Beispiele**:**

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = -i$$

$$\frac{2}{1+i} = \frac{2\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = 1-i$$

$$\frac{13+13i}{2+3i} = \frac{(13+13i)\cdot(2-3i)}{(2+3i)\cdot(2-3i)} = \frac{65-13i}{13} = \frac{13\cdot(5-i)}{13} = 5-i$$

$$\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}\,i} = \frac{(\sqrt{3}-i)\cdot(1-\sqrt{3}\,i)}{(1+\sqrt{3}\,i)\cdot(1-\sqrt{3}\,i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

Spezialfall:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2}$$

Allgemein:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(\alpha_1+\beta_1 i)\cdot(\alpha_2-\beta_2 i)}{\alpha_2^2+\beta_2^2}$$