07 Die Kreisteilungsgleichung

Die Gleichung $z^n - 1 = 0$ heisst Kreisteilungsgleichung. Die Lösungen heissen n-te Einheitswurzeln:

$$z_k = \text{cis}\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

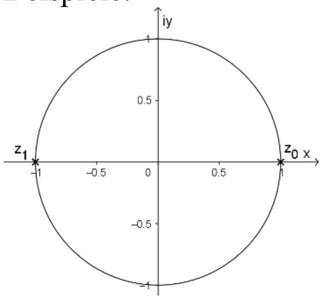
Mit dem Ansatz $z = cis(\varphi)$ folgt nach dem Satz von Moivre

$$z^n = (cis(\varphi))^n = cis(n\varphi) = 1$$

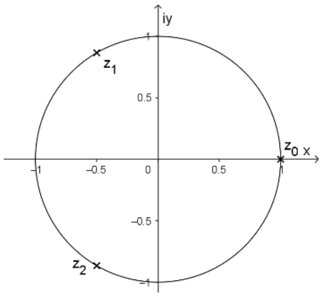
Da zwei komplexe Zahlen genau dann übereinstimmen, wenn Ihre Beträge gleich sind und ihre Argumente bis auf Vielfache von 2π übereinstimmen, folgt

$n\varphi = k \cdot 2\pi$ und daraus die Behauptung.

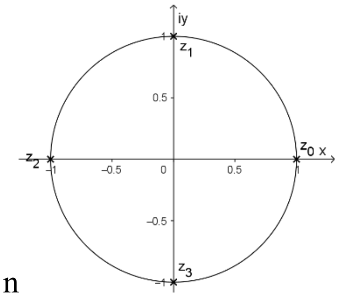
Beispiele:



$z^2 = 1$

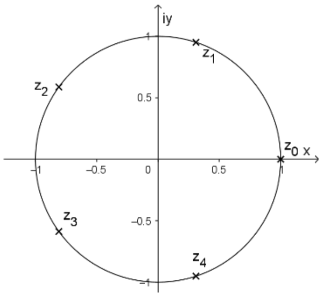


$z^3 = 1$

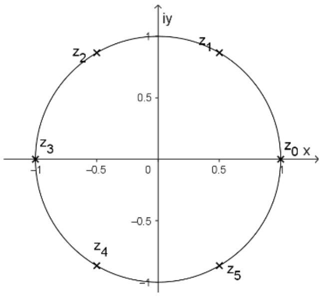


n

$z^4 = 1$



$z^5 = 1$

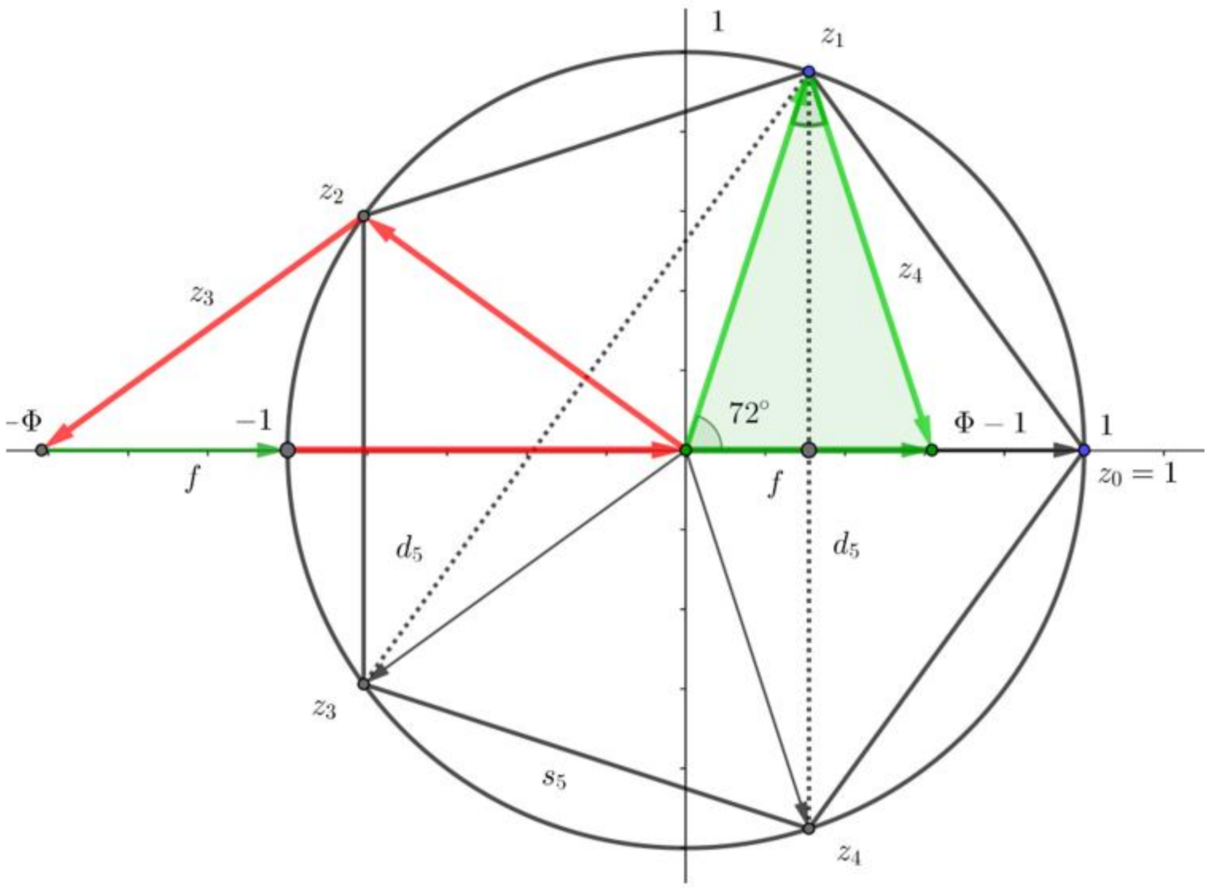


$z^6 = 1$

Die 5. Einheitswurzeln und der goldene Schnitt
Quelle: A. Junod VSMP-Bulletin Mai 2025

Dieser Abschnitt ergänzt die Kapitel Algebra → Folgen (Fibonaccizahl Φ) und Geometrie → Vielecke (goldener Schnitt). Es wird gezeigt, dass insbesondere die komplexen Koordinaten der 5. Einheitswurzeln mit der Fibonaccizahl Φ dargestellt werden können.

Die Kreisteilungsgleichung $z^5 - 1 = 0$ hat in Polarform die Lösungen
$z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{k\cdot 2\pi}{5}} = \mathrm{cis}(k\cdot 72°),\ k = 0, 1, 2, 3, 4$



Sind $z_0, = 1, z_1,\ z_2,\ z_3\ , z_4$ die 5. Einheitswurzeln dann kann der Term $z^5 - 1$ folgendermassen zerlegt werden:

$$z^5 - 1 = (z-1)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

Da die beiden Paare (z_1, z_4) und (z_2, z_3) konjugiert komplex sind, gilt auch

$$z^5 - 1 = (z-1)(z-z_1)(z-\overline{z_1})(z-z_2)(z-\overline{z_2})$$

Der Koeffizient von z^4 ist 0. Nach dem Satz von Vieta oder mit Koeffizientenvergleich ist die Summe der Einheitswurzeln also 0:

$$-(1 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = 0 \tag{1}$$

Wegen $z_1 \cdot \bar{z}_1 = |z_1|^2 = 1$ und $z_2 \cdot \bar{z}_2 = |z_2|^2 = 1$ (oder nach Vieta)
ist das mit (-1) multiplizierte Produkt der Beträge gleich -1

$$-(1 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4) = -1 \tag{2}$$

Die folgenden Beziehungen können auch in der Abbildung nachvollzogen werden.

Wegen (1) gilt auch $z_1 + z_4 = -(1 + z_2 + z_3)$ (3)

Bezeichnet man den Term auf der linken Seite mit f :
$f = z_1 + z_4$
so erhält man

$$f = z_1 + z_4 = z_1 + \bar{z_1} = 2 \cdot Re(z_1) = 2 \cdot cos(72°) \tag{4}$$

Mit (3) folgt aus $-(1 + z_2 + z_3) = f$

$$z_2 + z_3 = -f - 1 = 2 \cdot Re(z_2) = 2\cos(144°) = -2 \cdot cos(36°)$$

Da die beiden Paare (z_1, z_4) und (z_2, z_3) konjugiert komplex sind und ihre Summen und Produkte bekannt sind, kann die Zerlegung in die beiden quadratischen Polynome direkt angegeben werden:

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = (z-1)(z^2 - f \cdot z + 1) \cdot (z^2 + (1+f) \cdot z + 1) \tag{5}$$

Ausmultiplizieren der beiden letzten Faktoren ergibt:

$x^4 + x^3 + (2 - f^2 - f) \cdot x^2 + x + 1$
und nach Koeffizientenvergleich

$2 - f^2 - f = 1$ und die quadratische Gleichung für f:

$$f^2 + f - 1 = 0 \tag{6}$$

Mit der positiven Lösung $f_1 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$ und
der negativen Lösung $f_2 = -\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1)$
Die Lösungen von Gleichung (5) erinnern an die im Kapitel
Geometrie →Algebra →Folgen 07 eingeführte Fibonaccizahl
$\boldsymbol{\Phi = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1)}$=.

Die beiden Lösungen können somit in der folgenden Form dargestellt werden
$f_1 = \boldsymbol{f = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) = \Phi - 1} \approx 0.62$ und
$\boldsymbol{f_2 = -\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1) = -\Phi}$

Nachweis: $-\Phi$ erfüllt die Gleichung (6) und nach Vieta gilt $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f_2} = -\mathbf{1}$, also

$$\boldsymbol{f} = -\mathbf{1} - f_2 = -\mathbf{1} + \Phi$$

$$f_1 f_2 = -1 \text{ oder } f_2 = -\frac{1}{f_1} = -\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$f_2 = -\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = -\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) = -\Phi \approx -1.62$$

Mit der quadratischen Auflösungsformel können die übrigen Einheitswurzeln bestimmt werden.
1. Gleichung:
$z^2 - (\Phi - 1) \cdot z + 1 = 0$
Bei der Berechnung der Diskriminante kommt auch Φ^2 vor.

Die Bestimmungsgleichung für f: $f^2 + f - 1 = 0$ (6) kann auch in der Form
$f^2 = 1 - f$ geschrieben werden
Da $-\Phi$ eine Lösung dieser Gleichung gilt $(-\Phi)^2 = \Phi^2 = 1 + \Phi$
Dies bedeutet, dass Φ^2 durch $\Phi + 1$ ersetzt werde kannn.
Zunächst wird die mit (-1) multiplizierte Diskriminante bestimmt

$$-D = -((\Phi - 1)^2 - 4) = -(\Phi^2 - 2\Phi + 1 - 4) = -(-\Phi - 2) = \Phi + 2$$

Mit den Lösungen

$$z_{1,4} = \frac{(\Phi - 1) \pm \mathrm{i} \cdot \sqrt{\Phi + 2}}{2} \approx \quad 0.309 \pm \mathrm{i} \cdot 0.951$$

2. Gleichung
$z^2 + \Phi \cdot z + 1 = 0$
$-D = -((-\Phi)^2 - 4) = -(\Phi^2 - 4) = 4 - \Phi^2 = 4 - (\Phi + 1) = 3 - \Phi$
Mit den Lösungen

$$z_{2,3} = \frac{-\Phi \pm \mathrm{i} \cdot \sqrt{3 - \Phi}}{2} \approx -0.809 \pm \mathrm{i} \cdot 0.588$$

Damit können die Koordinaten der fünf Eckpunkte in Φ ausgedrückt werden

$A_0(1,0)$

$A_1\left(\frac{\Phi - 1}{2}, \frac{\sqrt{\Phi + 2}}{2}\right)$

$A_2\left(\frac{-\Phi}{2}, \frac{\sqrt{3 - \Phi}}{2}\right)$

$A_3\left(\frac{-\Phi}{2}, -\frac{\sqrt{3 - \Phi}}{2}\right)$

$A_1\left(\frac{\Phi - 1}{2}, \frac{\sqrt{\Phi + 2}}{2}\right)$

$A_1\left(\frac{\Phi - 1}{2}, -\frac{\sqrt{\Phi + 2}}{2}\right)$

Dank der speziellen Lage von A_2 und A_3 ist die Differenz der beiden Imaginärteile auch gerade gleich der Seitenlänge des Zehnecks. Mit diesem Ergebnis kann auch die Länge der Fünfeckseite angegeben werden:
$s_5 = \sqrt{\mathbf{3} - \Phi}$

Alternativ kann die Länge der Seite als Abstand zweier «benachbarter» Einheitswurzeln zum Beispiel mit $|z_1 z_0|$ berechnet werden.

Für die Kontrolle kann die im Kapitel Geometrie hergeleitete Beziehung zwischen den Seitenlängen des Fünfecks, Sechsecks und Zehnecks verwendet werden:

$s_5^2 = s_6^2 + s_{10}^2.$

$s_6 = 1$ und
$s_{10} = f = z_1 + z_4 = 2 \cdot \cos(72°) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = \Phi - \mathbf{1} \approx 0.618$

$\boldsymbol{L} = \mathbf{3} - \Phi = 1 + (\Phi - \mathbf{1})^2 = 1 + \Phi^2 - \mathbf{2}\Phi + \mathbf{1} = \mathbf{1} + \Phi + 1 - \mathbf{2}\Phi + \mathbf{1}$
$\boldsymbol{R} = 1 + (\Phi - \mathbf{1})^2 = 1 + \Phi^2 - \mathbf{2}\Phi + \mathbf{1} = \mathbf{1} + \Phi + 1 - \mathbf{2}\Phi + \mathbf{1} = \mathbf{3} - \Phi$

Nach einem Ergebnis im Kapitel Geometrie→Vieleck ist die Seite $\boldsymbol{s_5}$ im regulären Fünfeck der grössere Abschnitt der Diagonale $\boldsymbol{s_5}$., sie stehen als ebenfalls im Verhältnis Φ.
Die Länge der Diagonale kann deshalb bestimmt werden, indem man $\boldsymbol{s_5}$ mit Φ multipliziert.

$\boldsymbol{d_5} = \boldsymbol{s_5} \cdot \Phi = \Phi \cdot \sqrt{\mathbf{3} - \Phi} = \sqrt{\Phi^2(\mathbf{3} - \Phi)} = \sqrt{3\Phi^2 - \Phi^3} = \sqrt{\Phi + 2} \approx 1.91$

Die Gleichung $z^n = a \qquad a \in \mathbb{C}$

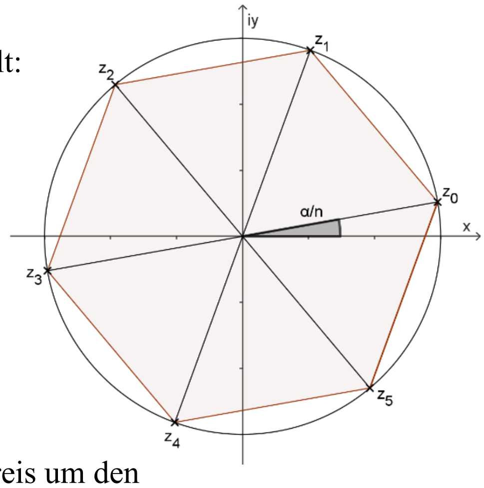
Einführendes Beispiel:
$z^3 - 8\mathrm{i} = 0 \qquad\qquad z^3 = 8\mathrm{i} = 8\,\mathrm{cis}(90°) = \rho^3\,\mathrm{cis}(3\varphi)$

Zwei komplexe Zahlen stimmen überein, wenn ihre Beträge gleich sind und ihre Argumente bis auf ganzzahlige Vielfache von 360° (2π) übereinstimmen (modulo 360° bzw. 2π).

Folgerung:
$\rho^3 = 8$ und damit $\rho = 2$
$3\varphi = 90° + k \cdot 360° \qquad k = 0, 1, 2 \qquad\qquad \varphi = 30° + k \cdot 120°,\ k = 0, 1, 2$
Die Gleichung hat also 3 verschiedene Lösungen $\rho = 2$ und $\varphi = 30°, 150°, 270°$

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $z^n = a$

Allgemeiner Fall $a \neq 0$
Die komplexe Zahl a wird zunächst in der Polarform dargestellt:
$a = \rho\,\mathrm{cis}(\alpha)$

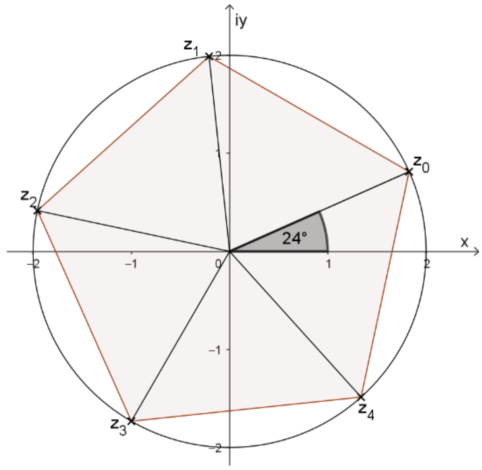


Satz:

Die Gleichung hat die n Lösungen
$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Bemerkung:
Die Lösungen liegen also in der Gaussschen Ebene auf dem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\sqrt[n]{\rho}$, die zugehörigen Punkte bilden ein reguläres n-Eck.

Beweis:
Es kann nachgerechnet werden, dass gilt: $z_k^n = a$
Beispiel:
$$\begin{aligned} z^5 &= 16\left(-1 + \mathrm{i} \cdot \sqrt{3}\right) \\ a &= 32\,\mathrm{cis}(120°) \\ \rho^5 &= 32 \text{ und damit } \rho = 2 \\ 5\varphi &= 120° + k \cdot 360° \\ \varphi &= 24° + k \cdot 72° \end{aligned}$$



Lösungen:
$z_k = 2\,\mathrm{cis}(24° + k \cdot 72°) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} z_0 &= 1.827 + 0.813\mathrm{i} \\ z_1 &= -0.209 + 1.989\mathrm{i} \\ z_2 &= -1 - 1.732\mathrm{i} \\ z_3 &= -1.956 + 0.416\mathrm{i} \\ z_4 &= 1.338 - 1.486\mathrm{i} \end{aligned}$$

Übungsbeispiele:

$z^4 = 16\,\mathrm{cis}(60°)$	Lösungen: $z_k = 2\,\mathrm{cis}(15° + k \cdot 90°)$	$k = 0, 1, 2, 3$
$z^3 = 1 + \mathrm{i}$	Lösungen: $z_k = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}(15° + k \cdot 120°)$	$k = 0, 1, 2$
$z^6 + 64 = 0$	Lösungen: $z_k = 2\,\mathrm{cis}(30° + k \cdot 60°)$	$k = 0, 1, \ldots, 5$
	$\sqrt{3} + \mathrm{i},\ 2\mathrm{i},\ -\sqrt{3} + \mathrm{i},\ -\sqrt{3} - \mathrm{i},\ -2\mathrm{i},\ \sqrt{3} - \mathrm{i}$	
$z^3 \cdot (1 - 2\mathrm{i}) = -8 + 16\mathrm{i}$	Lösungen: $-2,\ 1 + \mathrm{i} \cdot \sqrt{3},\ 1 - \mathrm{i} \cdot \sqrt{3}$	