8. Nullstellen von Polynomen, Fundamentalsatz

Quadratische Gleichungen

Spezialfall der reinquadratischen Gleichung: $z^2 = a$ $\quad a \in R$

Beispiele:
$z^2 = -36 = (6i)^2$ Lösungen: $z_{1,2} = \pm 6i$
$z^2 = -5 = \left(\sqrt{5}\, i\right)^2$ Lösungen: $z_{1,2} = \pm\sqrt{5}\, i$

Spezialfall der reinquadratischen Gleichung: $z^2 = a$ $\quad a \in C$

a wird in der Polarform dargestellt:
$z^2 = a = \rho \cdot cis\,\alpha$ Lösungen: $z_1 = \sqrt{\rho} \cdot cis\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $z_2 = \sqrt{\rho} \cdot cis\left(\frac{\alpha}{2} + 180°\right) = -z_1$

Beispiel:
$(2z - 3)^2 = -7$ oder

$2z - 3 = \pm\sqrt{7}i$ Lösungen $z_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$

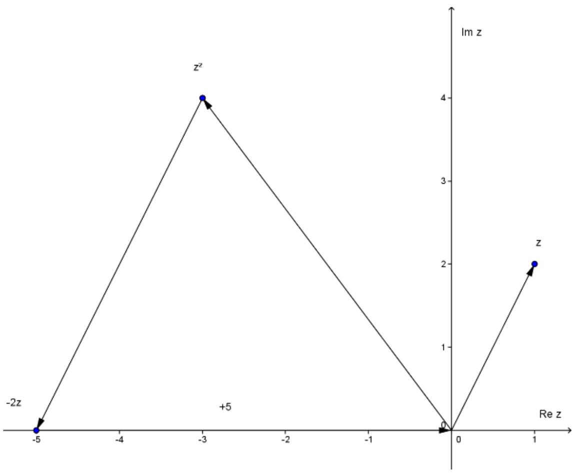
Analog zur Herleitung der Auflösungsformel in R zeigt man mit quadratischer Ergänzung:

> Satz:
> Die quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ mit $a, b, c \in R$ hat für
> $D < 0$ zwei konjugiert komplexe Lösung $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$.

Beispiele:
$z^2 - 4z + 29 = 0$ $D = -100$ $z_{1,2} = 2 \pm 5i$
$z^2 - 6z + 10 = 0$ $D = -64$ $z_{1,2} = 3 \pm i$

$z^2 - 2z + 5 = 0$ $D = -16$
$z_{1,2} = 1 \pm 2i$

Die Abbildung illustriert, dass 1 + 2i tatsächlich eine Lösung der quadratischen Gleichung ist:



Die Bestimmung der Lösungen einer quadratischen Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) mit beliebigen komplexen Koeffizienten kann analog zum reellen Fall auf die Berechnung von Quadratwurzeln zurückgeführt werden, denn sie kann mit quadratischer Ergänzung auf die folgende Form gebracht werden:

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{D}{a^2}$$

Das Problem, die quadratische Gleichung $w^2 = D = \alpha + i\beta$ kann auch ohne die Polarform gelöst werden. Nach einiger Rechnung ergeben sich die Lösungen:

$$w_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha\right)} + \frac{\beta}{|\beta|} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha\right)} \cdot i\right)$$

Beispiele:

$w^2 = 3 - 4i$ hat die Lösungen $\pm(2 - i)$

Die quadratische Gleichung $z^2 + 2iz + (-4 + 4i) = 0$ hat die Determinante D = 3 – 4i

Die Lösungen ergeben sich mit der Auflösungsformel zu

$z_1 = 2 - 2i$ und $z_2 = -2$.

Übungsaufgaben:

$z^2 + (i-2)z + 3 - i = 0$	$D = -9$	Lösungen $z_1 = 1 - 2i$ und $z_2 = 1 + i$
$z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0$	$D = (1 - 4i)^2 = -15 - 8i$	Lösungen $z_1 = 2 - 3i$ und $z_2 = 1$

Gleichungen höheren Grades

Es gibt zwar noch für Gleichungen 3. und 4. Grades Auflösungsformeln. Niels Henrik Abel konnte beweisen, dass für n ≥ 5 keine allgemeine Auslösungsformel existiert. In der Praxis werden Näherungsverfahren wie z.B. das Newtonverfahren verwendet.

9. Der Fundamentalsatz der Algebra

Unter einer Polynomfunktion n-ten Grades mit reellen oder komplexen Koeffizienten versteht man eine Funktion f mit der Gleichung
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Die Aufgabe, die Nullstellen eines Polynoms n-ten Grades zu bestimmen, führt auf eine sogenannte algebraische Gleichung n-ten Grades.

Der Fundamentalsatz der Algebra macht eine Aussage über die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms.

Fundamentalsatz der Algebra
In C zerfällt jedes Polynom n-ten Grades in genau n Linearfaktoren, d.h. es gilt:

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Aus diesem Grund sagt man, der Körper der komplexen Zahlen **C** ist algebraisch abgeschlossen, dies im Gegensatz zum Körper der reellen Zahlen R. In R hat etwa schon das einfache Polynom f(x) = x^2 + 1 hat keine reelle Nullstelle.

Bemerkungen:
Die Linearfaktoren müssen nicht notwendigerweise verschieden sein.
Der Satz sagt aus, dass ein Polynom bis auf einen konstanten Faktor durch seine Nullstellen bestimmt ist.

Spezialfall:
Sind insbesondere alle Koeffizienten reell, dann ist mit jeder komplexen Zahl auch die konjugiert komplexe Zahl eine Nullstelle, d.h. komplexe Nullstellen treten paarweise auf.

Beispiele:
$f(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4$ Polynom 3. Grades
Aus der Zerlegung
$$f(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4 = z^2(z-1) + 4(z-1) = (z-1)(z^2+4) = 0$$
ergeben sich die Nullstellen zu z_1 = 1, z_2 = 2i, z_3 = -2i und schliesslich die Zerlegung in Linearfaktoren
$$f(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z-1)(z-2i)(z+2i)$$

Übungsaufgabe:

Gesucht sind die Nullstellen des Polynoms $f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z$

Lösung:
$f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z = z\left(z^2 - 4z + 6\right)$ Nullstellen: z_1 = 0, $z_{2,3} = 2 \pm i\sqrt{2}$