

Komplexe Zahlen

1. (3.P.) Gegeben: $z = \frac{5+5i}{1-2i}$ Gesucht die Normalform von z (ohne TR zu lösen!)

Lösung: $-1 + 3i$

2. (3P.) Stelle die komplexe Zahl $-5 - 12i$ in der Polarform dar (ohne TR zu lösen!)

Lösung: $13 \operatorname{cis}(247.4^\circ)$

3. (3 P.) Berechne $\left(\sqrt[3]{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)^9$ Resultat in kartesischer Form

Lösung: $-32i$

4. (3 P.) Löse die Gleichung $z^4 = 8 - 8i\sqrt{3}$

Lösung: $2 \operatorname{cis}(75^\circ + k \cdot 90^\circ)$ $k = 0, 1, 2, 3$

5. (3 P.) Löse die Gleichung $2z + (1+i) \cdot \bar{z} = 5 - i$ Setze $z = x + iy$ $x, y \in \mathbf{R}$

Lösung: $z = 3 - 4i$

6. (4 P.)

a) Bestimme den Wert der Summe $i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{49} + i^{50}$

b) (kurz) Von einem gleichseitigen Dreieck ABC kennt man die Ecken A(0) und B(4 + 4i).

Bestimme C (aus Zeitgründen ist das Resultat nicht zu vereinfachen!)

Lösung:

a) $s = i^{49} + i^{50} = i - 1$

b) $z_C = z_B \operatorname{cis}(\pm 60^\circ)$

Reserve:

1.

Gegeben: a) $z = \frac{4 \cdot (\sqrt{3} - i)}{\sqrt{3} + i}$ b) $\frac{3\sqrt{2} + 3i}{\sqrt{2} - i}$

Gesucht die Normalform von z (ohne TR zu lösen!)

2.

Berechne die folgende Summe der Potenzen von i : $1 - i^1 + i^2 - i^3 + i^4 - i^5 \dots - i^{19} + i^{20}$

3.

Löse die Gleichung $(2 + i) \cdot z - 3\operatorname{Re}(z) = -18 + 30i$

Tipp: Setze $z = \alpha + i\beta$

$\operatorname{Re}(z)$ ist der Realteil von z

4.

Gegeben $z_1 = 12 \operatorname{cis} 140^\circ$ und $z_2 = 3 \operatorname{cis} 50^\circ$. Gesucht a) $z_1 \cdot z_2$ und b) $\frac{z_1}{z_2}$

Das Ergebnis ist bei a) in Polarform bei b) in Normalform anzugeben.

5.

Berechne a) $(-1 + i)^{10}$ b) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}i\right)^5$ c) $\left(\sqrt[3]{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)^9$

Das Resultat ist in der Normalform anzugeben.

6.

$2 - 5i$ ist eine Lösung der Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ (b und c sind reell).

a) Wie heisst die andere Lösung?

b) Bestimme b und c .

7.

Bestimme alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 + z^2 + 1 = 0$ (Polarform angeben!).

8.

Bestimme c so, dass die Gleichung $z^3 + 2z^2 - 3z + c = 0$ die Lösung $z_1 = 2$ hat. Wie heissen die übrigen Lösungen?

9.

Der Nullpunkt ist Schwerpunkt eines gleichseitigen Dreiecks mit dem Eckpunkt $A(4 + 4i)$. Bestimme die Koordinaten eines der übrigen Eckpunkte.

10.

Stelle die Punkte der Gauss'schen Ebene dar, die folgende Gleichung (bzw. Ungleichung) erfüllen:

a) $|z - 4i| \geq |z + 2|$

b) $|z + 2 - i| = 3$

11.

Stelle die Punkte der Gauss'schen Ebene dar, die folgende Gleichung erfüllen:

$(\operatorname{Im}(z + i))^2 = |z - i|^2$

Setze: $z = x + iy$

12.

Stelle die folgenden Punktmengen in der Gauss'schen Ebene dar:

a) $|z| = 2$ b) $|z - 2i|^2 = |z - 4|^2$

Tipp: Interpretiere die Beträge geometrisch oder setze $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

13.

Kreuze an, ob die Aussage wahr (w) oder falsch (f) ist.

	w	f
$\operatorname{Re}(i)$ ist eine reelle Zahl		
$\operatorname{Re}(i)$ ist eine imaginäre Zahl		
$\operatorname{Im}(i)$ ist eine reelle Zahl		
$\operatorname{Im}(i)$ ist eine imaginäre Zahl		

Streiche durch, was falsch ist.

$\operatorname{Re}(i) =$	0	1	-1	i
$\operatorname{Im}(i) =$	0	1	-1	i