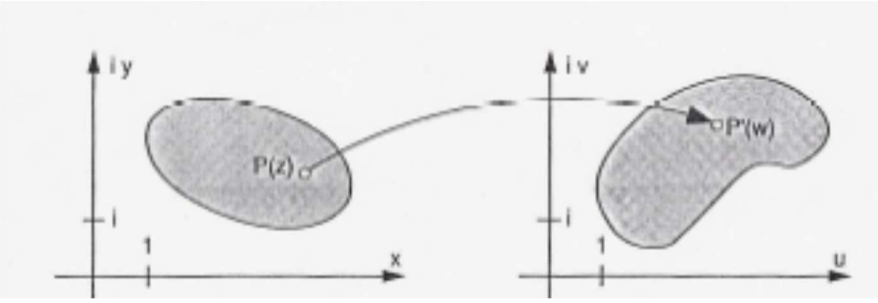
Komplexe Funktionen

1. Einleitung, Definition

Im Text wird nicht immer unterschieden zwischen den entsprechenden Objekten Zahl, Punkt und Vektor.



Originalebene: z – Ebene Bildebene: w – Ebene

$$z = x + iy \xrightarrow{f} w = u + iv$$

Eine komplexe Funktion f ordnet jeder Zahl aus der Definitionsmenge $D \subset \mathbf{C}$ genau eine komplexe Zahl $w \in C$ zu. Der Funktion entspricht in der Gauss'schen Ebene ein Abbildung, die jedem Originalpunkt P(z) den Bildpunkt P´(w) zuordnet.

Bemerkung:
Häufig werden die Original- und die Bildpunkte in ein und dieselbe Gauss'sche Ebene gezeichnet.

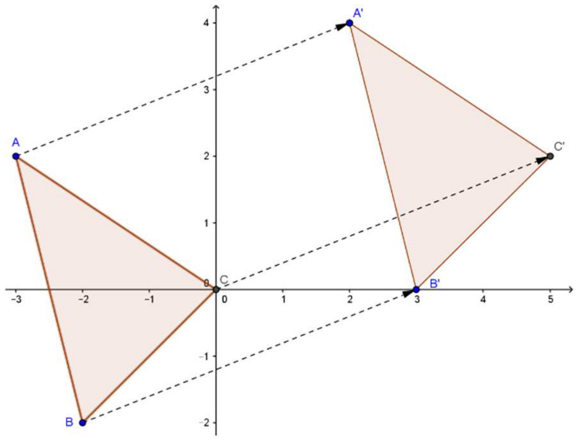
2. Die ganze lineare Abbildung

In diesem Abschnitt wird die ganze lineare Funktion $z \to w = az + b$ ($a \neq 0$) untersucht.

Spezialfälle:
2.1 a = 1
$z \to w = z + b$

Beispiel:
$z \to w = z + 5 + 2i$

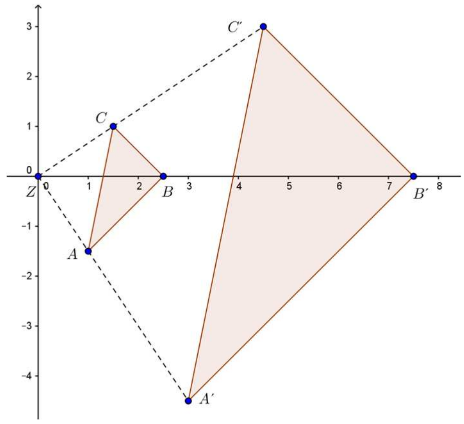
Die Abbildung verschiebt das Dreieck ABC um den Vektor $\binom{5}{2}$ in das Bilddreieck A´B´C´.



Allgemein:
Die Abbildung
$z \to w = z + b$

beschreibt eine Verschiebung (Translation) der Originalpunkte um den Vektor b.

2.2 b = 0, a ≠ 0, a ∈ **R**
Beispiel:
a = 3
Das Dreieck ABC wird mit dem Zentrum O und dem Faktor 3 gestreckt. Original- und Bildfigur sind perspektiv ähnlich.

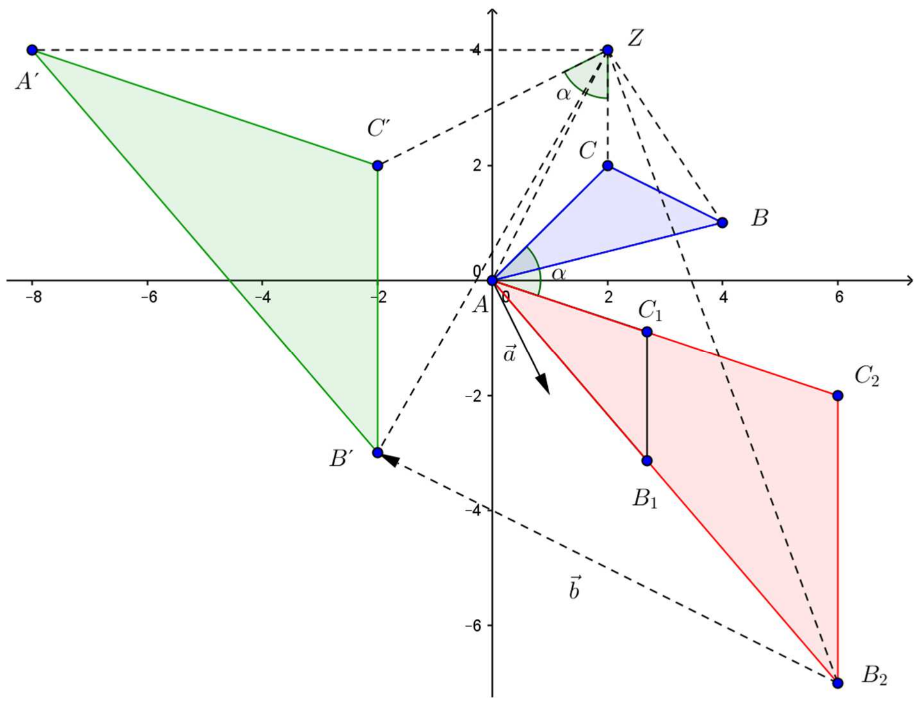


Allgemein:
Die Abbildung
$z \rightarrow w = az \quad a \neq 0, a \in R$
beschreibt eine zentrische Streckung mit dem Zentrum O und dem Faktor $|a|$.

2.3 b = 0, a ≠ 0, a ∈ **C**

Beispiel:
$a = 1 - 2i = \sqrt{5} \cdot e^{i\alpha}$

mit α = -arctan(2)
Das Dreieck ABC wird um O mit dem Winkel $\alpha \approx -63.4°$ gedreht (Dreieck AB_1C_1) und anschliessend mit dem Zentrum O und dem Faktor $\sqrt{5}$ gestreckt (rotes Dreieck $A_2B_2C_2$) Dabei ist die Reihenfolge vertauschbar.



Als Vorbereitung für den allgemeinen Fall wird das bisherige Beispiel ergänzt:
$z \rightarrow w = (1 - 2i)z + (-8 + 4i)$

Die Addition von b = -8 + 4i bewirkt zusätzlich eine Translation des Dreieck $A_2B_2C_2$ um die als Vektor aufgefasste Zahl b (grünes Dreieck A´B´C´).
Für einen Fixpunkt muss gelten:
$z = (1 - 2i)z + (-8 + 4i)$ oder umgeformt
$z(1 - (1 - 2i)) = -8 + 4i$
$z_0 = \frac{-8 + 4i}{2i} = 2 + 4i$

Interpretation:
Das Beispiel lässt vermuten, dass die Zusammensetzung der Drehstreckung um O und der Translation um b durch eine Drehstreckung um den Fixpunkt Z mit dem Drehwinkel α ersetzt werden.

2.4 Allgemeiner Fall

$z \to w = az + b$ (a ≠ 0) 1)

Mit der Polardarstellung von a

$a = |a| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = |a| \cdot \operatorname{cis}\alpha = |a| \cdot e^{i\alpha}$

ist zu erkennen, dass die Abbildung aus einer Drehstreckung um den Nullpunkt mit dem Faktor $|a|$ und dem Drehwinkel α und einer Translation um b zusammengesetzt ist. Im Spezialfall $|a| = 1$ handelt es sich um eine reine Drehung.

Ein Fixpunkt erfüllt die Bedingung

$z_0 = az_0 + b$ 2)

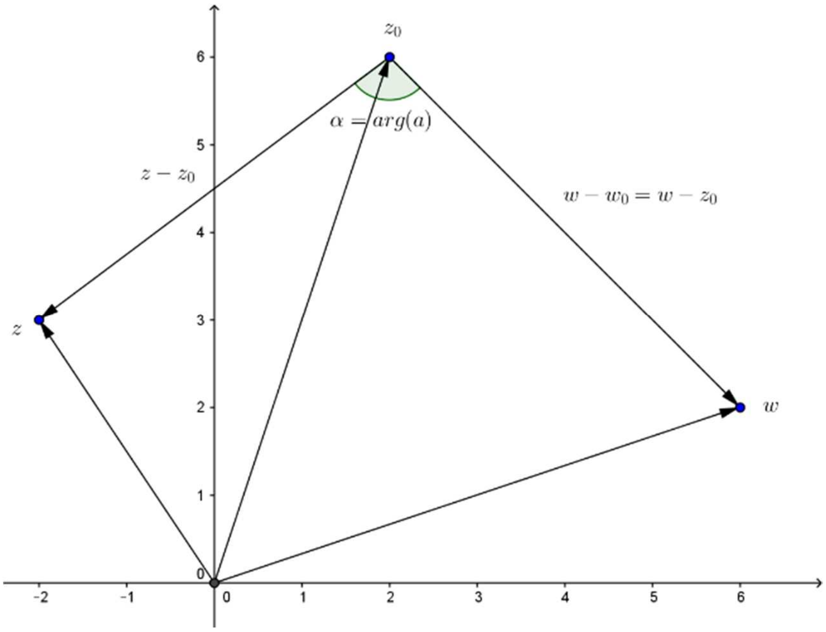
Diese Gleichung hat für a ≠ 1 die Lösung

$$z_0 = \frac{b}{1-a}$$

Werden die beiden Seiten der Gleichung 2) von der Funktionsgleichung 1) subtrahiert, so ergibt sich

$w - w_0 = az + b - az_0 + b = a(z - z_0)$ oder also wegen $w_0 = f(z_0) = z_0$

$w - z_0 = a(z - z_0)$ 3)



Das Ergebnis bedeutet, dass die ganze lineare Funktion für a ≠ 1 eine Drehstreckung um den Fixpunkt z_0 mit dem Faktor $|a|$ und dem Drehwinkel α beschreibt.

Zusammenfassend gilt:

Satz:

Der ganzen linearen Funktion $z \to w = az + b$ (a ≠ 0) entspricht in der Gauss'schen Ebene

für a = 1 die Translation mit dem zu b gehörenden Vektor

für a ≠ 1 die Drehstreckung mit dem Streckungsfaktor $|a|$, dem Drehwinkel arg(a) und dem Zentrum $Z\left(\frac{b}{1-a}\right)$.

Spezialfälle:

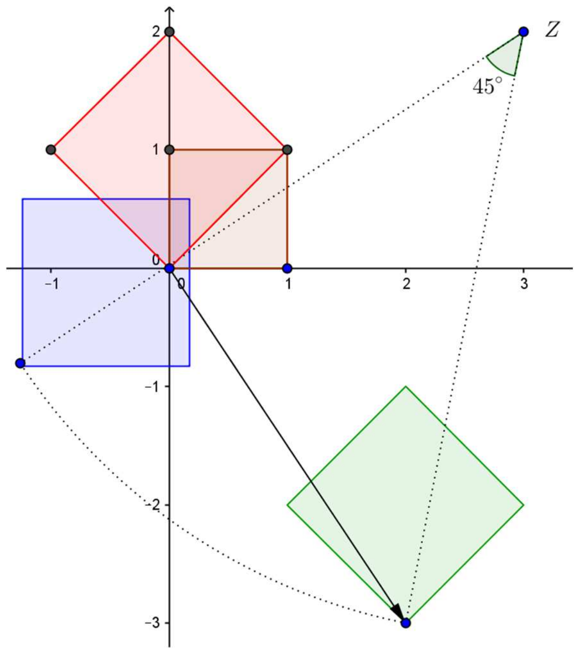
$|a| = 1$ Drehung

$a \in R\backslash\{0\}$ zentrische Streckung

Aufgabe:
Gegeben ist die folgende komplexe Funktion
$f: z \to w = f(z) = (1+i) \cdot z + 2 - 3i$
a)
Welche einfachen geometrischen Abbildungen beschreiben diese Funktion in der Gauss'schen Ebene?
Welche Bildkurven ergeben sich rechnerisch und geometrisch für
b) die imaginäre Achse
c) den Einheitskreis?

a)

Wegen $a = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ ist die Abbildung aus einer Streckung mit Zentrum O und dem Streckungsfaktor $\sqrt{2}$ und dem Drehwinkel 45° (rote Figur) und einer Translation um den Vektor b = 3 + 2i (grün) zusammengesetzt.



Der Fixpunkt der Abbildung erfüllt die Gleichung
$z = (1+i) \cdot z + 2 - 3i$
mit der Lösung
$z_0 = 3 + 2i$
Das grüne Quadrat kann also direkt durch eine Drehstreckung mit Zentrum $z_0 = 3 + 2i$, dem Streckungsfaktor $\sqrt{2}$ und dem Drehwinkel 45° erhalten werden.

b)
Die reelle Achse hat die Parametergleichung
x = 0
y = t
in kartesischen Koordinaten lauten die Abbildungsgleichungen
$u = x - y + 2$
$v = x + y - 3$

Für die Parametergleichung der Bildgeraden führt dies auf
$u = -t + 2$
$v = \quad t - 3$

Durch Addition der beiden Gleichungen ergibt sich die Koordinatengleichung der Bildgeraden
$u + v + 1 = 0$
Das Bild ist also die Gerade mit der Steigung -1 und dem y-Achsenabschnitt -1.

c)
Bild des Einheitskreises $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = 1$
Die Umkehrabbildung von f hat die Gleichung
$$z = \frac{w-b}{a}$$
eingesetzt in die Kreisgleichung ergibt
$$z \cdot \bar{z} = \left(\frac{w-b}{a}\right) \cdot \overline{\left(\frac{w-b}{a}\right)} = 1$$
oder ausmultipliziert
$$(w-b) \cdot \overline{w-b} = a \cdot \bar{a} = |a|^2$$
oder
$$|w-b|^2 = |a|^2$$
Die Bildkurve ist also wegen b = 2 – 3i und $|a|^2 = |1+i|^2 = 2$ ein Kreis mit Mittelpunkt M(2, -3) und Radius r = $\sqrt{2}$.

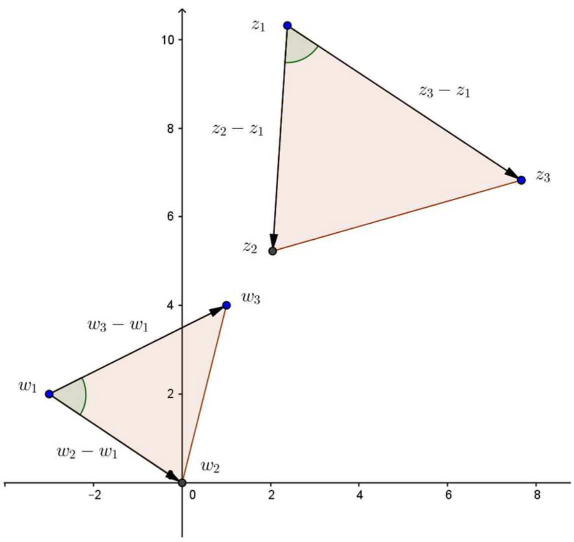
Bemerkung:
Die Gleichung der Bildkurve kann auch mit den kartesischen Abbildungskoordinaten oder auf geometrischem Weg (als Drehstreckung) bestimmt werden.

Eigenschaften von Ähnlichkeitsabbildungen

Berechnet man mit der Abbildungsgleichung das Verhältnis $\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}$
$$\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1} = \frac{az_3+b-(az_1+b)}{az_2+b-(az_1+b)} = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$
so zeigt sich, dass gilt:
$$\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1} = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$
Die Zähler bzw. Nenner können als Seitenvektoren interpretiert werden.

Aus der Gleichheit der beiden komplexen Zahlen folgt die Gleichheit ihrer Beträge
$$\left|\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}\right| = \frac{|w_3-w_1|}{|w_2-w_1|} = \left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right| = \frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|}$$
Das Ergebnis bedeutet, dass bei einer gleichsinnigen Ähnlichkeit entsprechende Seitenlängen im gleichen Verhältnis stehen.

Aus der Gleichheit der Argumente folgt, dass die Abbildung winkeltreu ist.



Übungsaufgabe:
Wie lautet die Abbildungsgleichung für eine Drehstreckung mit dem Zentrum 1 – i mit dem Faktor 2 und dem Drehwinkel $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

Lösung:
Aus den Angaben mit $|a| = 2$, arg(a) = $-\frac{\pi}{2}$
und $z_0 = 1 - i$ ergibt sich mit dem Ansatz 3):
$w - 1 + i = -2i(z - 1 + i)$ oder vereinfacht
$w = -2iz + (3 + i)$