Die Joukowski-Funktion

1. Definition und Eigenschaften

Der russische Aerodynamiker N.J Joukowski (1847 – 1921) erkannte, dass die folgende Joukowskifunktion einen geeignet gewählten Kreis in die Form eines Flügelprofils abbildet.

$$f : z \to w = \tfrac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad z \neq 0$$

Abbildungsgleichungen in Polarform:
Mit

$$z = x + iy = \rho \cdot e^{i\varphi} = \rho \cdot cis\,\varphi = \rho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

bzw. $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho \cdot cis\varphi} = \frac{1}{\rho} \cdot cis(-\varphi)$

ergibt sich

$$w = \tfrac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\rho \cdot cis\varphi + \frac{1}{\rho} \cdot cis(-\varphi)\right) \cdot$$

Wegen $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ haben die Abbildungsgleichungen die kartesische Form
w = u + iv, wobei

$$u = \mathrm{Re}(w) = \tfrac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cdot \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\rho \cdot \cos\varphi \cdot \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) = \tfrac{1}{2}x \cdot \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) \qquad 1.1$$

$$v = \mathrm{Im}(w) = \tfrac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \cdot \sin\varphi = \tfrac{1}{2}\rho \cdot \sin\varphi \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) \cdot = \tfrac{1}{2}y \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) \qquad 1.2$$

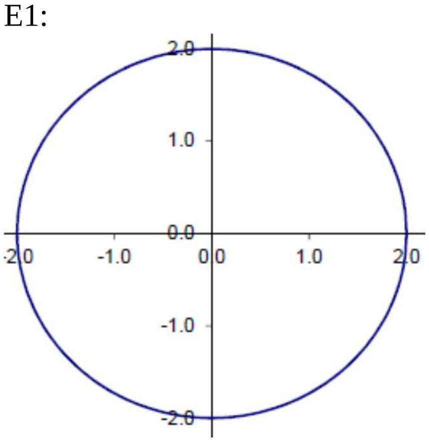
oder mit der Substitution $a = \tfrac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ bzw. $b = \tfrac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)$

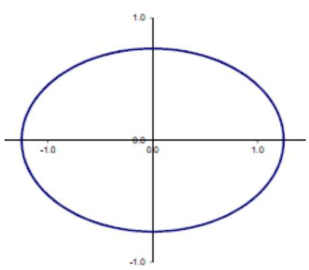
$$u = a \cdot \cos\varphi \qquad 1.3$$

$$v = b \cdot \sin\varphi \qquad 1.4$$

Eigenschaften der Joukowskiabbildung

E1:





Die Bilder der Kreise $|z| = r > 1$ sind Ellipsen mit den Halbachsen $a = \tfrac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ und

$b = \tfrac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)$

Beweis:

Wegen $\frac{u}{a} = \cos\varphi$ bzw. $\frac{v}{b} = \sin\varphi$ und $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ gilt:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

Beispiel:

In der Abbildung hat der Ursprungskreis mit Radius ρ = 3 als Bild die Ellipse mit den Halbachsen a = $^5/_3$ und b = $^4/_3$ (blau dargestellt).

E2:

Der Einheitskreis wird auf die Strecke [-1,1] abgebildet (in der Abbildung grün)

Beweis:

Im Spezialfall des Einheitskreises vereinfachen sich die Abbildungsgleichungen zu

$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2} \cdot (cis\varphi + cis(-\varphi)) = \cos\varphi \cdot$ also gilt $|Re\, z| \leq 1$ und Im z = 0.

E3:

Die Bilder der Halbgeraden $\varphi = \arg(z)$ mit ρ > 1 sind Halbäste der Hyperbel mit den Halbachsen $|\cos\varphi|$ bzw. $|\sin\varphi|$.

Beweis:

Mit 1.3 bzw. 1.4 ergibt sich:

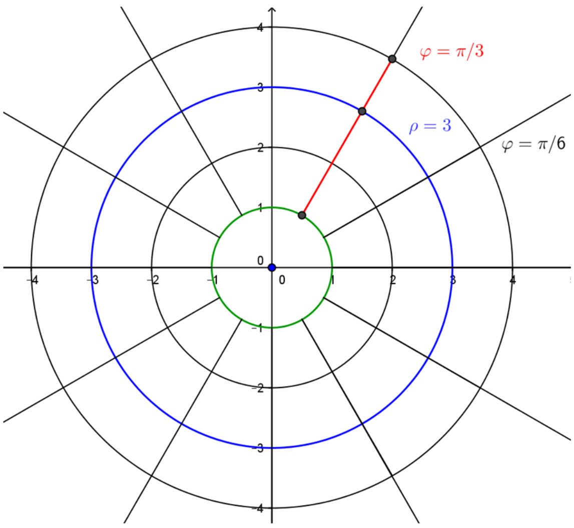
$\frac{u}{\cos\varphi} = a$ bzw. $\frac{v}{\sin\varphi} = b$ und daraus $\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = a^2 + b^2 = 1$, womit gilt:

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1$$

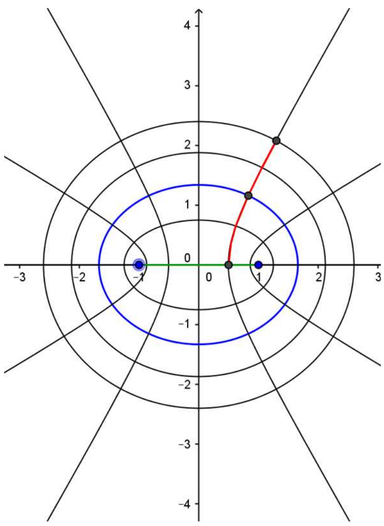
Beispiel:

In der Abbildung hat die Halbgerade mit der Gleichung $\varphi = \frac{\pi}{3}$ als Bild die Hälfte eines Hyperbelastes mit den Halbachsen $a = \left|\cos\frac{\pi}{3}\right|$ und $b = \left|\sin\frac{\pi}{3}\right|$ (rot dargestellt).

z-Ebene



w-Ebene



Es ist zu erkennen, dass das Äussere des Einheitskreises umkehrbar eindeutig auf die geschlitzte Gauss-Ebene ohne das Intervall [-1, 1] abgebildet wird. Eine entsprechende Aussage gilt für das Kreisinnere.

2. Joukowskiprofile

Die Joukowskifunktion bildet das Äussere eines Kreises, der durch den Punkt z = 1 geht und den Punkt –1 im Innern enthält, auf das Äussere eines Joukowskiprofils ab. Auf diese Weise erhält man eine mögliche Form von Flugzeugtragflächen.
Im Beispiel wurde ein

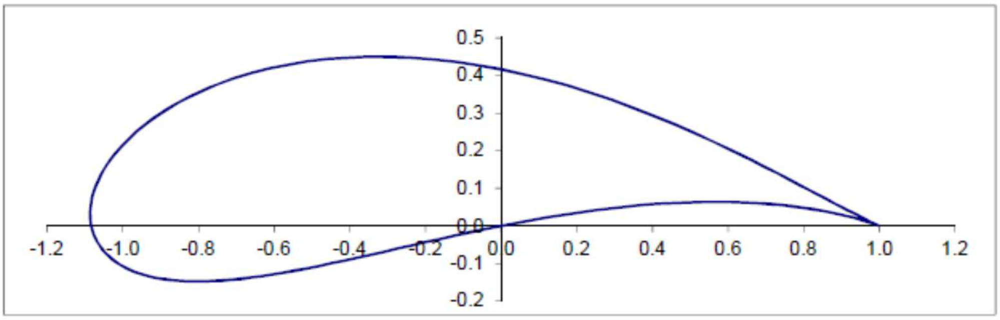
Kreis mit Mittelpunkt M($-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$) und Radius $r = \frac{\sqrt{26}}{4}$ gewählt, der durch den Punkt A(1) geht.

$x = \mathrm{Re}(z) = r \cdot \cos\varphi - \frac{1}{4}$

$y = \mathrm{Im}(z) = r \cdot \sin\varphi + \frac{1}{4}$

Lösung mit Excel mit $\Delta\varphi = \frac{\pi}{24}$

phi	Re z	Im z	ρ^2	Re w	Im w
0.000	1.025	0.250	1.113	0.973	0.013
0.131	1.014	0.416	1.201	0.929	0.035
0.262	0.981	0.580	1.299	0.868	0.067
0.393	0.928	0.738	1.405	0.794	0.106
0.524	0.854	0.887	1.517	0.709	0.151
0.654	0.761	1.026	1.632	0.614	0.199
0.785	0.651	1.151	1.750	0.512	0.247
0.916	0.526	1.261	1.868	0.404	0.293
1.047	0.387	1.354	1.983	0.291	0.336



Lösung mit Maple

$$x := \frac{\sqrt{26}}{4} \cdot \cos(t) - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{26}\cos(t) - \frac{1}{4} \qquad (1)$$

$$y := \frac{\sqrt{26}}{4} \cdot \sin(t) + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{26}\sin(t) + \frac{1}{4} \qquad (2)$$

$$\rho := \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\cos(t) - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\sin(t) + \frac{1}{4}\right)^2} \qquad (3)$$

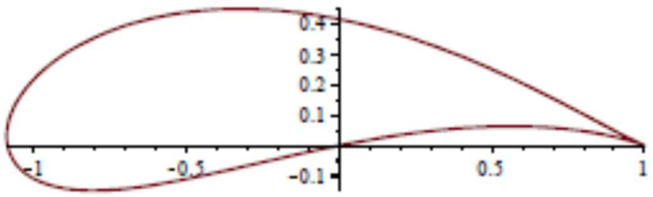
$$u := \frac{x}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\cos(t) - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\cos(t) - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\sin(t) + \frac{1}{4}\right)^2}\right) \qquad (4)$$

$$v := \frac{y}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\sin(t) + \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\cos(t) - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\sin(t) + \frac{1}{4}\right)^2}\right) \qquad (5)$$

```
> plot([u, v, t=0..2·π])
```



3. Die Umkehrung der Joukowski-Funktion

Wird die Funktionsgleichung von f: $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ für ein w mit $w \in C\backslash[-1, 1]$ nach z aufgelöst so ergibt sich wegen $2w = z + \frac{1}{z}$ nach Multiplikation mit $z \neq 0$ die quadratische Gleichung
$z^2 - 2wz + 1 = 0$ mit der Determinante $D = 4(w^2 - 1)$.
Ihre Lösungen sind
$z_{1,2} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$

Damit stellt sich das Problem $w^2 - 1$ als Quadrat einer komplexen Zahl d darzustellen.
Wegen w = u + iv und d = r +is muss gelten
$w^2 - 1 = (u + iv)^2 - 1 = (r + is)^2$ oder
$u^2 - v^2 - 1 + i \cdot 2uv = r^2 - s^2 + i \cdot 2rs$
Aus der Gleichheit der Real- bzw. der Imaginärteile folgt das Gleichungssystem

$$\left| \begin{matrix} r^2 - s^2 = u^2 - v^2 - 1 \\ 2rs = 2uv \end{matrix} \right| \qquad 3.1$$

Wird abkürzend für

$$u^2 - v^2 - 1 = R \qquad 3.2$$

$$\sqrt{\frac{R + \sqrt{R^2 + (2uv)^2}}{2}} = T \qquad 3.3$$

gesetzt, dann gilt

> Die Umkehrfunktion $\bar{f}$ die jedem Wert w = u + iv mit $w \in C\backslash[-1, 1]$ einen Wert z = x + iy mit $|z| > 1$ zuordnet:
>
> im Fall $u \neq 0$ bzw. $u \neq 0$ $\qquad x = u + sgn(u) \cdot T \qquad v = v + sgn(u) \cdot \frac{uv}{T}$
>
> wobei
>
> $$T = \sqrt{\frac{R + \sqrt{R^2 + (2uv)^2}}{2}} \qquad R = u^2 - v^2 - 1$$
>
> Spezialfälle:
> v = 0 (Urbild der reellen Achse)
>
> $z = u + sgn(u) \cdot \sqrt{u^2 - 1}$, sofern $|u| > 1$
>
> u = 0, $v \neq 0$ (Urbild der imaginären Achse)
>
> $z = i \cdot \left(v \pm sgn(v) \cdot \sqrt{v^2 + 1}\right)$

Die Herleitung erfolgt in drei Schritten:
a)
v = 0 Urbild der reellen Achse:
Das Gleichungssystem vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$\left| \begin{matrix} r^2 - s^2 = u^2 - 1 \\ rs = 0 \end{matrix} \right|$$

Der Unterfall:
a) r = 0
führt auf $-s^2 \ = u^2 - 1$ oder $s^2 \ = 1 - u^2$, was zu einem Punkt im Innern des Einheitskreises führen würde.
b) s = 0 führt auf $r^2 \ = u^2 - 1$ oder $r = \pm\sqrt{u^2 - 1}$, wobei $u^2 - 1 > 0$ gelten muss.
Die Lösung heisst damit $z = u = \pm\sqrt{u^2 - 1}$, wobei das Pluszeichen für u > 0 und das Minuszeichen für u < 0 gilt, wofür kurz geschrieben werden kann
$z = u + sgn(u) \cdot \sqrt{u^2 - 1}$

b)
u = 0 Urbild der imaginären Achse
Das Gleichungssystem heisst in diesem Fall

$$\begin{vmatrix} r^2 - s^2 \ = -v^2 - 1 \\ rs = 0 \end{vmatrix}$$

Der Unterfall
a) r = 0
führt auf $-s^2 \ = -v^2 - 1$ oder $s^2 \ = v^2 + 1$ oder $s = \pm\sqrt{v^2 + 1}$
Die Lösung heisst damit
$z = i \cdot \left(v \pm \sqrt{v^2 + 1}\right)$
wobei erneut das Pluszeichen für v > 0 und das Minuszeichen für v < 0 gilt, wofür kurz geschrieben werden kann
$z = i \cdot \left(v \pm sgn(v) \cdot \sqrt{v^2 + 1}\right)$

Nun können u und v verschieden von 0 vorausgesetzt werden.
c)
In der Folge wird abkürzend $u^2 - v^2 - 1 = R$ verwendet: Wegen 3.1 sind mit u und v auch r und s von 0 verscheiden.
Auflösung der zweiten Gleichung nach s und Einsetzen in die erste Gleichung ergibt:
$r^2 - \left(\frac{uv}{r}\right)^2 \ = R$
oder nach Mulitplikation mit r^2 auf die biquadratische Gleichung
$r^2 - s^2 \ = u^2$
$r^4 - R \cdot r^2 - u^2v^2 \ = 0$
mit der Diskriminante
$D = R^2 + 4u^2v^2$
und den Lösungen
$r_{1,2}^2 = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 4u^2v^2}}{2}$
wobei das Minuszeichen kommt in Frage kommt, da r^2 nicht negativ sein kann.
Als mögliche Werte für r ergeben sich damit
$r_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{R + \sqrt{R^2 + 4u^2v^2}}{2}}$
Dabei hängt das Vorzeichen von r vom Vorzeichen von u ab.
Für positive u gilt das Pluszeichen, für negative das Minuszeichen. Damit ergibt sich das folgende Resultat für x bzw. y:
$r = sgn(u) \cdot \sqrt{\frac{R + \sqrt{R^2 + (2uv)^2}}{2}}$

4. Strömungslinienbilder

Diese werden in Schritten aufgebaut:

1. Bild 2
Die Umkehrung der Joukowski-Funktion bildet die geschlitzte Ebene (Bild 1) auf das Äussere des Einheitskreises ab. Dabei werden horizontale Strömungslinien auf Linien abgebildet, die den Kreis umströmen.
$z_1 = f^{-1}(w)$
2. Bild 3
Die Ähnlichkeitsabbildung d streckt und verschiebt den Kreis, die Strömungslinien ändern ihre Richtung.
$z_2 = d(z_1)$
3. Bild 4
Bei geeigneter Wahl von d in 2. erzeugt die Joukowski-Abbildung aus dem Kreis ein Flügelprofil, wobei die Anströmungsrichtung erhalten bleibt.

Beispiel:
ad 1.
In der Abbildung sind die Bilder der Strömungslinie $w = p \cdot i + t$ für die Parameterwerte p = 1, ½ , $^1/_5$, - $^1/_5$ -$^1/_2$ und -1 angegeben. In den folgenden Tabellen ist jeweils die Berechnung für p = ½ aufgeführt.

u = Re w	v =Im w	R		T	x = Re z	y = im z
-2.00	0.50	2.75	3.40	1.75	-3.75	1.07
-1.50	0.50	1.00	1.80	1.18	-2.68	1.13
-1.00	0.50	-0.25	1.03	0.62	-1.62	1.30
-0.50	0.50	-1.00	1.12	0.24	-0.74	1.53
0.00	0.50	-1.25	1.25	0.00	0.00	1.62
0.50	0.50	-1.00	1.12	0.24	0.74	1.53
1.00	0.50	-0.25	1.03	0.62	1.62	1.30
1.50	0.50	1.00	1.80	1.18	2.68	1.13
2.00	0.50	2.75	3.40	1.75	3.75	1.07

ad 2.
Die Ähnlichkeitsabbildung $d(z) = \frac{\sqrt{26}}{4} \cdot cis30° + m$ mit m = - ¼ + ¼· i bildet den Einheitskreis in den Kreis mit Mittelpunkt M(- ¼ + ¼· i) und Radius $\frac{\sqrt{26}}{4}$ ab.
In der folgenden Tabelle sind die Real- und Imaginärteile dargestellt.
Die kartesische Darstellung von d(z) lautet:
$$d(z) = \rho \cdot (x \cdot \cos 30° - y \cdot \sin 30°) - \frac{1}{4} + \rho \cdot (x \cdot \sin 30° + y \cdot \cos 30°) + \frac{1}{4}$$

$\rho \cdot \cos 30°$	$\rho \cdot \sin 30°$
1.10397	0.6374

	x = Re z	y = im z	x'	y'
0.5	-3.75	1.07	-5.08	-0.96
0.5	-2.68	1.13	-3.94	-0.21
0.5	-1.62	1.30	-2.87	0.65
0.5	-0.74	1.53	-2.04	1.46
0.5	0.00	1.62	-1.28	2.04
0.5	0.74	1.53	-0.40	2.41
0.5	1.62	1.30	0.71	2.72
0.5	2.68	1.13	1.99	3.21
0.5	3.75	1.07	3.21	3.82

ad 3.

	x	y
0.5	-5.08	-0.96
0.5	-3.94	-0.21
0.5	-2.87	0.65
0.5	-2.04	1.46
0.5	-1.28	2.04
0.5	-0.40	2.41
0.5	0.71	2.72
0.5	1.99	3.21
0.5	3.21	3.82

Bild 2

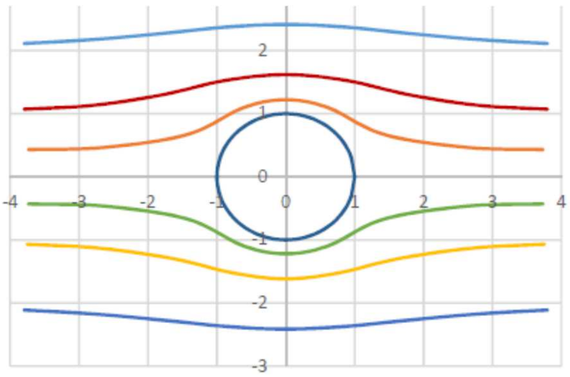


Bild 1

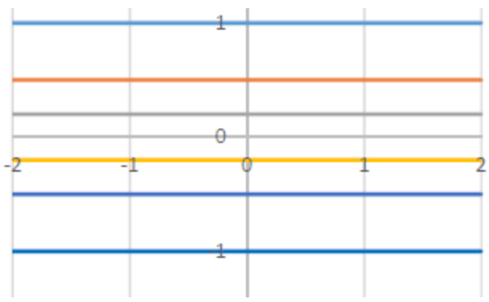


Bild 3

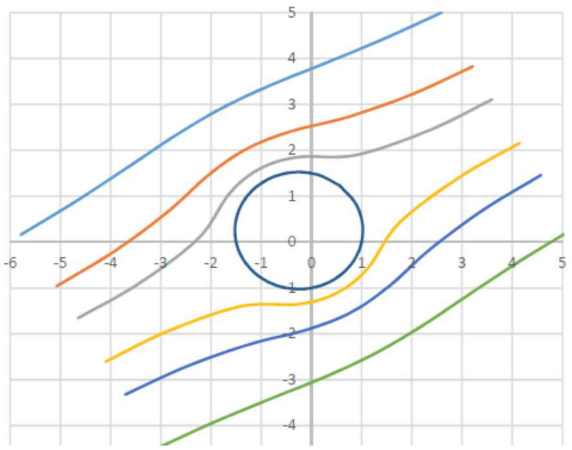


Bild 4