3. Anwendungen

1. Chemische Reaktionen

Aufgabe:
Die Gleichung
$x_1 NH_3 + x_2 O_2 \rightarrow x_3 NO_2 + x_4 H_2O$
beschreibt die Verbrennung von Ammoniak NH_3 zu Stickstoffoxid und Wasser
Für welche möglichst kleinen natürlichen Zahlen x_1, x_2, x_3 und x_4 ist die Gleichung erfüllt?

Für jede Atomart müssen auf jeder Seite gleich viele Atome vorkommen:

N: $x_1 = x_3$
H: $3x_1 = 2x_4$
O: $2x_2 = 2x_3 + x_4$

$$\left| \begin{array}{llll} x_1 & & -x_3 & = 0 \\ 3x_1 & & -2x_4 & = 0 \\ & 2x_2 & -2x_3 - x_4 & = 0 \end{array} \right| \qquad \text{erweiterte Matrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elimination nach Gauss-Jordan liefert die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Die allgemeine Lösung heisst damit
$x_1 = \frac{2}{3}t, x_2 = \frac{7}{6}t, x_3 = \frac{2}{3}t, x_4 = t$
Für t = 6 erhält man die kleinste Lösung mit natürlichen Zahlen
$x_1 = 4,\ x_2 = 7,\ x_3 = 4,\quad x_4 = 6$, womit also gilt:
$4NH_3 + 7O_2 \rightarrow 4NO_2 + 6H_2O.$

Übungsaufgaben:
a) $x_1 Fe + x_2 O_2 \rightarrow x_3 Fe_2O_3$ Rosten von Eisen in trockener Luft
b) $x_1 C_6H_{12}O_6 + x_2 O_2 \rightarrow x_3 CO_2 + x_4 H_2O$ Verbrennung von Traubenzucker

Lösung
a) $4Fe + 3O_2 \rightarrow 2Fe_2O_3$
b) $C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O$

2 Mischungsrechnung

Aufgabe:
Alpaka (Neusilber) ist eine Legierung aus Kupfer, Nickel und Zink. Wie können mit den vier in der Tabelle angegebenen Sorten 100g Alpaka mit einem Gehalt von 55% Kupfer, 23% Nickel und 22% Zink hergestellt werden?

	I	II	III	IV
Kupfer	40%	50%	60%	70%
Nickel	26%	22%	25%	18%
Zink	34%	28%	15%	12%

Besteht die Legierung aus x_i g der Sorten i mit i = 1, 2, 3, 4 so ergibt sich das System

$$\left|\begin{array}{llll} 40x_1 & +50x_2 & +60x_3+70x_4 = 5500 \\ 26x_1 & +22x_2 & +25x_3+18x_4 = 2300 \\ 34x_1 & +28x_2 & +15x_3+12x_4 = 2200 \end{array}\right|$$

bzw. die erweiterte Matrix

$$\begin{bmatrix} 40 & 50 & 60 & 70 & 5500 \\ 26 & 22 & 25 & 18 & 2300 \\ 34 & 28 & 15 & 12 & 2200 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan führt auf die folgende erweiterte Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & -\frac{50}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{7} & \frac{450}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{300}{7} \end{bmatrix}$$

und die allgemeine Lösung

$x_4 = t$

$x_3 = \frac{1}{7}(300 - 4t) = \frac{4}{7}(75 - t)$

$x_2 = \frac{1}{7}(450 - 13t)$

$x_1 = \frac{1}{7}(10t - 50) = \frac{10}{7}(t - 5)$

Da nichtnegative Lösungen gesucht sind muss gelten: $5 \leq x_4 \leq \frac{450}{13}$

Wählt man insbesondere die begrenzenden Werte, so ist eine Herstellung mit drei Sorten möglich:

t = 5: mit Sorten II, III, IV oder $t = \frac{450}{13}$ mit den Sorten I, III, IV

Übungsaufgabe:

a)

Die drei Alkohol-Ammoniak-Wasser-Mischungen F_1, F_2, F_3 haben die in der folgenden Tabelle angegebenen Konzentrationen

	Alkohol	Ammoniak	Wasser
F1	85%	10%	5%
F2	75%	15%	10%
F3	60%	20%	20%

Wie müssen die Anteile x_1, x_2, x_3 der drei Mischungen gewählt werden, damit 1 Liter eines Gemischs mit 70% Alkohol, 16% Ammoniak und 14% Wasser hergestellt werden kann?

Lösung:

$$\left|\begin{array}{llll} 85x_1 & +75x_2 & +60x_3 & = 70 \\ 10x_1 & +15x_2 & +20x_3 & = 16 \\ 5x_1 & +10x_2 & +20x_3 & = 14 \end{array}\right|$$

Die gesuchte Mischung ergibt sich mit 40% von F_1 und 60% F_3.

b)

Rostfreier Stahl ist eine Legierung aus Eisen, Chrom und Nickel.

18/10-Stahl zum Beispiel besteht aus 72% Eisen, 18% Chrom und 10% Nickel.

In der Tabelle ist die Zusammensetzung der drei Legierungen dargestellt. Wieviel Nickel (D) mit Menge x_4 ist zu den Legierungen

A, B und C mit den Mengen x_1, x_2, x_3 mindestens beizufügen, wenn eine Tonne 18/10-Stahl hergestellt werden soll? (Resultate auf kg runden)

weiterfahren

	A	B	C	D
Eisen	70%	74%	78%	0%
Chrom	22%	18%	15%	0%
Nickel	8%	8%	7%	100%

$$\left|\begin{array}{lllll} 70x_1 & +74x_2 & +78x_3 & & = 72 \\ 22x_1 & +18x_2 & +15x_3 & & = 18 \\ 8x_1 & +8x_2 & +7x_3 & +100x_4 & = 10 \end{array}\right|$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{147}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{333}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -92 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_4 = t$

$x_3 = -2 + 92t = 2(46t - 1)$

$x_2 = \frac{9}{2}(1 - 37t)$

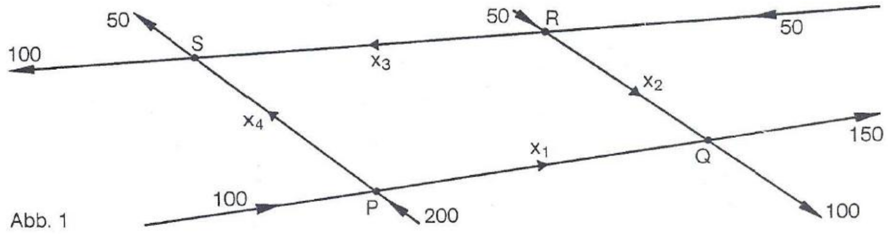
$x_1 = \frac{1}{2}(147t - 3) = \frac{3}{2}(49t - 1)$

Da die Lösungen nicht negativ sein dürfen, muss $t = x_4 \geq \frac{1}{46}$ sein. Da auch x_1 und x_2 für diesen Wert von t positiv sind, ist die Lösung $\left(\frac{9}{92}, \frac{81}{92}, 0, \frac{1}{46}\right)$

Es müssen also zu 22 kg Nickel 98 kg der Sorte A und 880 kg der Sorte B beigefügt werden.

3 Fluss in Netzen

Aufgabe:
Die Abbildung zeigt schematisch den Verkehrsfluss auf vier Einbahnstrassen einer Stadt. Die Zahlen sind Schätzungen für die Anzahl der pro Stunde erwarteten Autos. Mit diesen können Verkehrsdichten x_1, x_2, x_3 und x_4 ermittelt werden. Welches ist der kleinstmögliche Verkehrsfluss zwischen P und Q?



Wenn an einer Kreuzung kein Stau entstehen soll, dann muss der ankommende Verkehr gleich dem abfliessenden Verkehr sein. Die führt an den Kreuzungen zu folgenden Gleichungen:

Kreuzung P: $x_1 + x_4 = 300$
Kreuzung Q: $x_1 + x_2 = 250$
Kreuzung R: $x_2 + x_3 = 100$
Kreuzung S: $x_3 + x_4 = 150$

Die zugehörige erweiterte Matrix

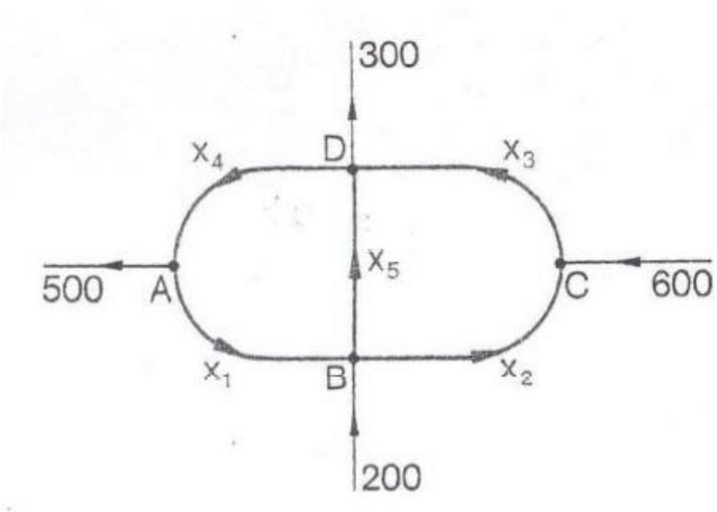
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{bmatrix} \text{ hat die Zeilenstufenform } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die allgemeine Lösung lautet somit
$x_4 = t$
$x_3 = 150 - t$
$x_2 = t - 50$
$x_1 = 300 - t$

Da es sich um Einbahnstrassen handelt müssen die Lösungen nicht negativ sein, d.h. es muss gelten:
$50 \leq x_4 \leq 150$

Wählt man $x_4 = 150$ so ergibt sich als minimaler Verkehrsfluss zwischen den Kreuzungen P und Q der Wert
$x_1 = 300 - x_4 = 150.$

Übungsaufgabe:
Es ist für das abgebildete Einbahnstrassennetz ein Gleichungssystem aufzustellen.
a) wie heisst die allgemeine Lösung?
b) Welche Bedingung muss x_4 erfüllen, damit bei A kein Stau entsteht?
c) Wie könnte z.B. eine spezielle Lösung des Problems heissen?



Lösung:

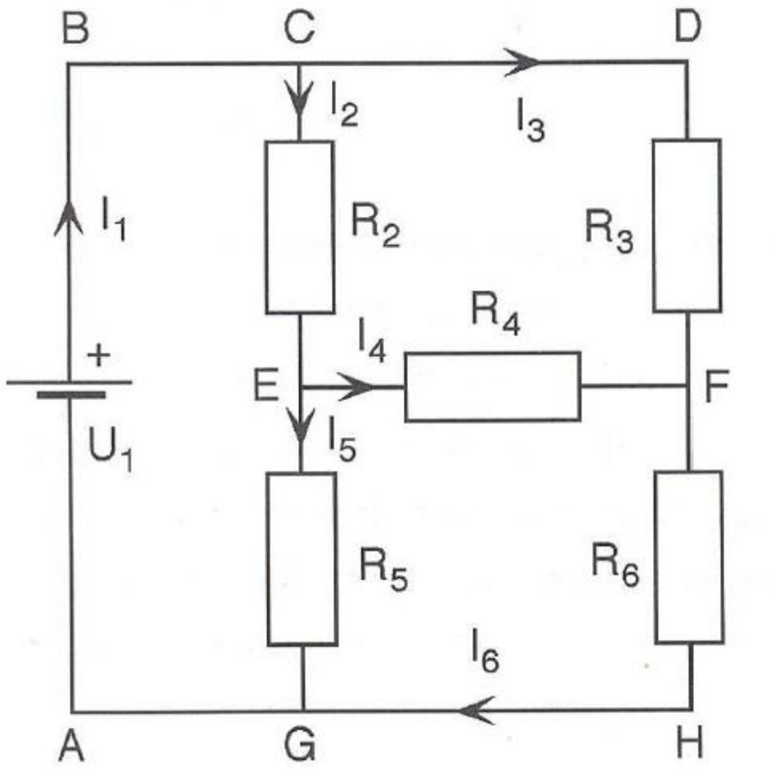
Kreuzung A: $-x_1 + x_4 = 500$
Kreuzung B: $-x_1 + x_2 + x_5 = 200$
Kreuzung C: $-x_2 + x_3 = 600$
Kreuzung D: $x_3 - x_4 + x_5 = 300$

a)
$x_5 = t$
$x_4 = s$
$x_3 = 300 + s - t = 300 + x_4 - x_5$
$x_2 = -300 + x_4 - x_5$
$x_1 = -500 + x_4$

b) $x_4 \geq 500$

c) z.B. $x_1 = 50, x_2 = 100, x_3 = 700, x_4 = 550, x_5 = 150$

4. Elektrische Netzwerke



Aufgabe:
Gegeben ist ein aus idealen Leitern bestehendes elektrisches Netzwerk mit einer Batterie (Spannung U_1) und fünf Widerständen mit den Werten R_2 , R_3, …., R_6. Es gelten die folgenden Kirchhoffschen Gesetze:
1. Knotenregel:
an jedem Knoten (Verzweigung) ist die Summe der hinein fliessenden Ströme gleich der Summe der hinaus fliessenden Ströme.
2. Maschenregel:
Entlang eines geschlossenen Weges im Netzwerk (Masche) muss die Summe der Potenzialänderungen verschwinden. Eine Analogie dazu:
Kehrt man bei einer Bergwanderung zum Ausgangspunkt zurück, dann muss die Summe der zurückgelegten Höhenunterschiede Null sein.
Beim Pluspol einer Batterie ist das elektrische Potential um die Batteriespannung höher als beim Minuspol. Die Potentiale vor und nach einem Widerstand unterscheiden sich um $\pm$ RI. Da der elektrische Strom stets vom höheren zum tieferen Potential fliesst, ist die Potentialänderung –RI negativ, wenn der Weg in Stromrichtung (abwärts) durch einen Widerstand führt, sonst positiv.

Bemerkung zu 1.
Da es nicht immer möglich ist, die Richtung des Stroms anzugeben, kann man diese zunächst willkürlich festlegen. Ergibt dann die Rechnung einen negativen Wert, dann kann die Richtung nachträglich korrigiert werden.

Beispiel:
$R_2 = 24\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 6\Omega$, $R_5 = 2\Omega$, $R_6 = 9\Omega$, $U_1 = 30V$

Für die dargestellte Schaltung ergeben sich damit die folgenden Knoten- bzw. Maschengleichungen:

Knoten F:	$I_6 = I_3 + I_4$
Knoten E	$I_2 = I_4 + I_5$
Knoten C:	$I_1 = I_2 + I_3$
Masche CDFEC:	$3I_3 - 6I_4 - 24I_2 = 0$
Masche ABCG:	$24I_2 + 2I_5 = 30$
Masche ABCDFHGA:	$3I_3 + 9I_6 = 30$

Ordnet man die Gleichungen nach den Unbekannten, so erhält man folgende erweiterte Matrix

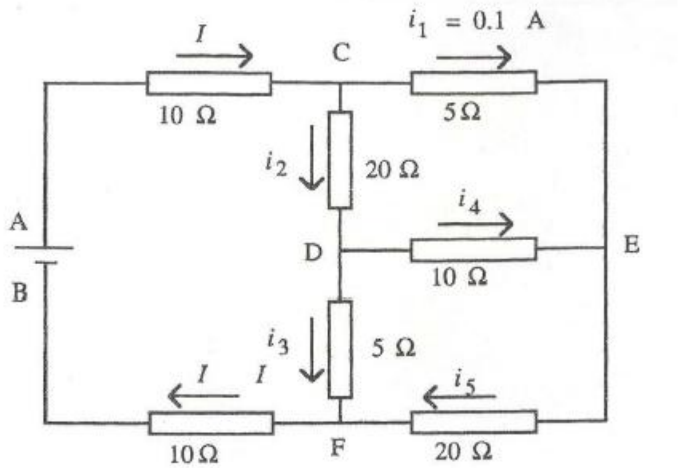
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 2 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 9 & 30 \end{bmatrix}$$

Sie lässt sich mit dem Gauss-Jordan-Algorithmus umformen zu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Daraus ergeben sich die Lösungen:
$I_1 = 5\text{A}$ $\quad I_2 = 1\text{A}$ $\quad I_3 = 4\text{A}$ $\quad I_4 = -2\text{A}$ $\quad I_5 = 3\text{A}$ $\quad I_6 = 2\text{A}$
Das Minuszeichen für I_4 bedeutet, dass die Stromrichtung in entgegengesetzter Richtung einzuzeichnen ist.

Übungsaufgabe:
Aus den folgenden Angaben in der Abbildung ist die Spannung U_{AB} zu bestimmen.



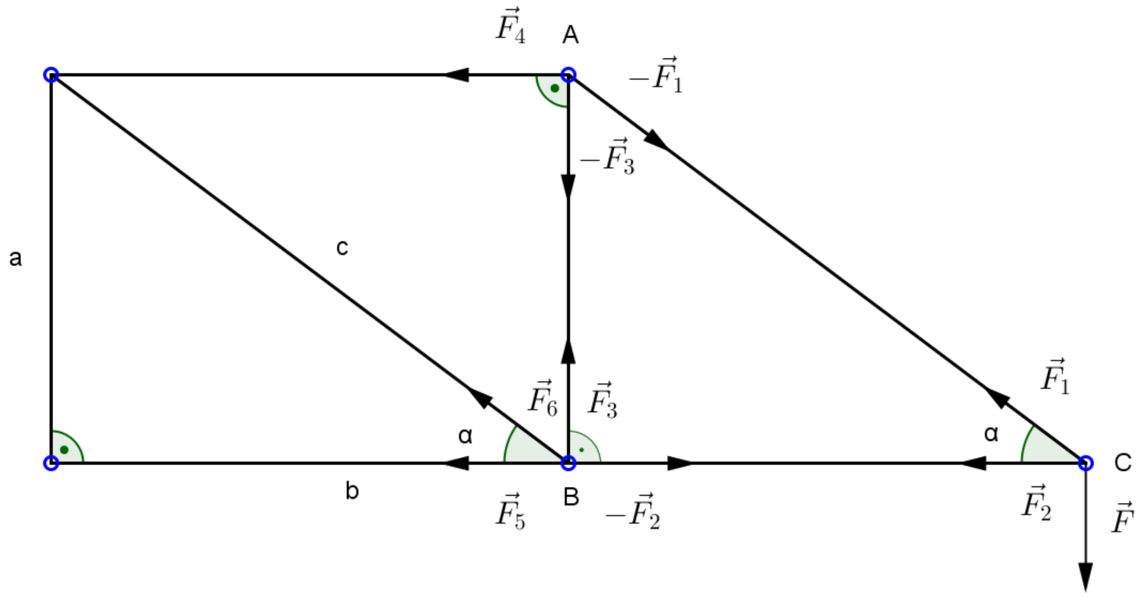
	I	i_2	i_3	i_4	i_5	
Knoten C:	-1	1	0	0	0	-0.1
Knoten D:	0	-1	1	1	0	0
Knoten E:	0	0	0	-1	1	0.1
Knoten F:	1	0	-1	0	-1	0
Masche CEDC	0	-20	0	-10	0	-0.5
Masche DEFD	0	0	-5	10	20	0

Lösung:
I = 0.15A, $i_2 = 0.05$A $i_3 = 0.10$A $i_4 = -0.05$A $i_5 = 0.05$A
Für die Spannung ergibt sich daraus:
$U_{AB} = U_{AC} + U_{CD} + U_{DF} + U_{FB} = 10 \cdot \mathrm{I} + 20 \cdot \mathrm{i}_2 + 5 \cdot \mathrm{i}_3 + 10 \cdot \mathrm{I} = 4.5\ \mathrm{V}$

4. Statik (Quelle: Bey)

Aufgabe:

Der abgebildete (vereinfachte) Kranausleger besteht aus drei rechtwinkligen Dreiecken mit den Katheten a = 3m und b = 4m. Dieses Tragwerk besteht aus Stahlrohren, deren Eigengewicht vernachlässig t wird. Welche Kräfte wirken auf die sechs Rohre, wenn die Belastung $\left|\vec{F}\right| = F = 60'000N$ beträgt?



Der Betrag des Vektors $\vec{F_i}$ wird im Folgenden mit x_i mit i = 1, …6 abgekürzt.
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem erhalten die Kraftvektoren die folgenden Komponenten:

$\vec{F} = F \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{F_1} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(180° - \alpha) \\ \sin(180° - \alpha) \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$\vec{F_2} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos 180° \\ \sin 180° \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{F_3} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} \cos 90° \\ \sin 90° \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{F_4} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} \cos 180° \\ \sin 180° \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{F_5} = x_5 \cdot \begin{pmatrix} \cos 180° \\ \sin 180° \end{pmatrix} = x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{F_6} = x_6 \cdot \begin{pmatrix} \cos(180° - \alpha) \\ \sin(180° - \alpha) \end{pmatrix} = x_6 \cdot \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = x_6 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

In den drei Knoten gelten die folgenden Gleichungen:

Knoten C:

$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F} = \vec{0}$ in Komponenten $\begin{aligned} -\tfrac{4}{5}x_1 - x_2 &= 0 \\ \tfrac{3}{5}x_1 &= F \end{aligned}$

Knoten A:

$-\vec{F_1} - \vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{0}$ in Komponenten $\begin{aligned} \tfrac{4}{5}x_1 - x_4 &= 0 \\ -\tfrac{3}{5}x_1 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

Knoten B:

$-\vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_5} + \vec{F_6} = \vec{0}$ in Komponenten $\begin{aligned} x_2 - x_5 - \tfrac{4}{5}x_6 &= 0 \\ x_3 + \tfrac{3}{5}x_6 &= 0 \end{aligned}$

Das Gleichungssystem hat die erweiterte Matrix

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mit der Lösung

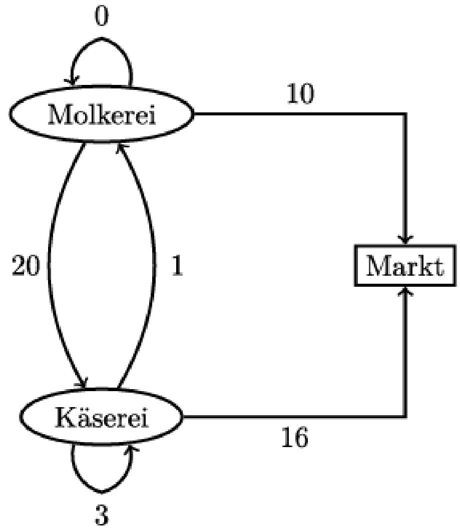
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3}F \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3}F \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -F \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3}F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3}F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3}F \end{bmatrix}$$

Die Kräfte an den sechs Rohren haben damit die folgenden Beträge:

$F_1 = F_6 = \frac{5}{3}F$ = 100‘000 N
$F_2 = F_4 = \frac{4}{3}$ $= 80'000\ N$
$F_3 = F$ = 60‘000 N
$F_5 = -\frac{8}{3}F$ = 160‘000 N

5. Leontjef-Matrizen, Produktionsplanung

In einem Dorf gibt es eine Molkerei (M) und eine Käserei (K). Sie sind mit dem Markt nach dem sogenannten Leontjef-Modell in der Abbildung verflochten:



Die Angaben in der Tabelle zeigen in einem Beispiel wie sich anteilsmässig die Gesamtproduktion auf die verschiedenen Sektoren verteilt:

von ↗ nach	Molkerei	Käserei	Markt	Gesamtproduktion
Molkerei	0	20	10	30
Käserei	1	3	16	20

Die von den beiden Betrieben M und K produzierten Mengeneinheiten (ME) können im sogenannten Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Frage 1
Wie viele ME gelangen auf den Markt, wenn 900 ME Milch und 100 ME Käse produziert werden? Mit anderen Worten:
Wie kann der Marktabgabevektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ aus dem Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 900 \\ 100 \end{pmatrix}$ berechnet werden?

Die Gesamtproduktion von M beträgt $30 = 0 + 20 + 10 = 30$ ME.
Dazu trägt M (gemäss Spalte 1) nichts und K eine ME bei.
Also benötigt M für die Produktion von 1 ME die Anteile $\frac{0}{30}$ von M und $\frac{1}{30}$ von K.

Die Gesamtproduktion von K beträgt $20 = 1 + 3 + 16 = 20$ ME.
Dazu trägt M (gemäss Spalte 2) 20 ME und K 3 ME bei.
Also benötigt K für die Produktion von 1 ME die Anteile $\frac{20}{20}$ von M und $\frac{3}{20}$ von K.

Damit beträgt im allgemeinen Fall eines Produktionsvektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ die Produktion von M:

$$\frac{0}{30} \cdot x_1 + \frac{20}{20} \cdot x_2$$

und die von K

$$\frac{1}{30} \cdot x_1 + \frac{3}{20} \cdot x_2$$

Addiert man zu den Gleichungen die entsprechenden Marktabgaben, so erhält man die Gesamtproduktion von M

$$x_1 = \mathbf{0} \cdot x_1 + \mathbf{1} \cdot x_2 + y_1 \qquad (1)$$

Für K ergibt sich entsprechend

$$x_2 = \mathbf{\frac{1}{30}} \cdot x_1 + \mathbf{\frac{3}{20}} \cdot x_2 + y_2 \qquad (2)$$

Die sogenannte Leontjef Matrix A besteht aus den Anteilen der beiden Betriebe:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{0}{30} & \frac{20}{20} \\ \mathbf{\frac{1}{30}} & \mathbf{\frac{3}{20}} \end{pmatrix}$$

Das aus den beiden Gleichungen (1) und (2) gebildete Gleichungssystem kann damit in Matrizenform geschrieben werden:

$$\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{y}$$

Daraus ist der Marktabgabevektor $\vec{y}$ bestimmt zu

$$\vec{y} = \vec{x} - A \cdot \vec{x}$$

Mit der Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kann wegen $\vec{x} = E \cdot \vec{x}$ der Marktabgabevektor in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\boxed{\vec{y} = E\vec{x} - A \cdot \vec{x} = (E - A) \cdot \vec{x} \qquad (3)}$$

Berechnung der Marktnachfrage$\vec{y}$ aus dem Produktionsvektor $\vec{x}$

Damit ist Frage 1 beantwortet.

Frage 2:
Welche Gesamtproduktion $\vec{x}$ muss eingeplant werden, wenn die Marktnachfrage $\vec{y}$ vorgegeben ist?

Existiert die inverse Matrix von $(E - A)$, dann kann die Gleichung (3) von links mit $(E - A)^{-1}$ multipliziert werden. Für den gesuchten Produktionsvektor $\vec{x}$ gilt damit.

$$\vec{x} = \ -A)^{-1} \cdot \vec{y} \qquad (4)$$

Berechnung des Produktionsvektors aus der Marktnachfrage

Überprüfung der Angaben in der Tabelle und Beantwortung von Frage 1:

Leontjef-Matrix $\quad A = \begin{pmatrix} \frac{0}{30} & \frac{20}{30} \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{20} \end{pmatrix}$

Einheitsmatrix $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Gesamtproduktion $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}$

Eigenbedarf der beiden Betrieb $\quad A.\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$E - A = E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{30} & \frac{17}{20} \end{pmatrix}$$

Marktnachfrage $\quad (E - A).\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix}$

Antwort Frage 1 mit anderen Vorgaben:

Gesamtproduktion $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 900 \\ 100 \end{pmatrix}$

Marktabgabe $\quad \vec{y} = (E - A).\begin{pmatrix} 900 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 55 \end{pmatrix}$

Frage 2: (Kontrolle)

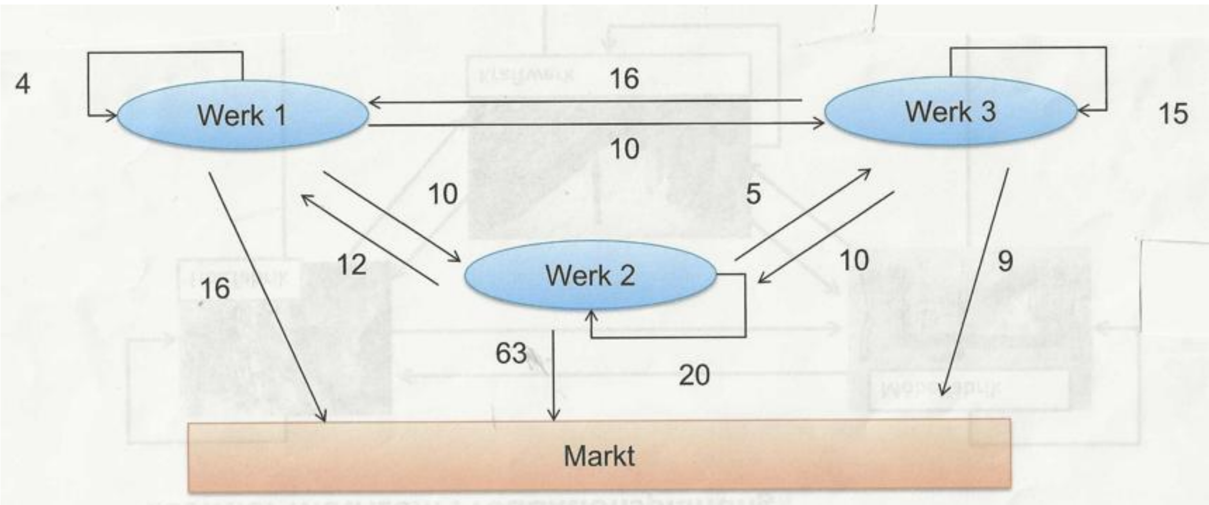
Marktnachfrage $\quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 800 \\ 55 \end{pmatrix}$

Berechnung des Produktionsvektor $\vec{x}$ aus der Marktnachfrage $\vec{y}$ nach Gleichung (4)

Produktionsvektor $\quad \vec{x} = \ (I - A)^{-1} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 900 \\ 100 \end{pmatrix}$

Das im besprochenen Beispiel gewählte Vorgehen kann bei mehr als zwei Produzenten angewendet werden.

Im folgenden Beispiel stellen drei Firmen (Werke) ein Produkt her, das sie selbst vermarkten oder das in einem anderen Werk weiterverarbeitet wird. Zum Beispiel produziert Werk 1 für den Markt 16 ME, verwendet 4 ME für den Eigenbedarf, und leitet 10 ME an Werk 2 und 10 ME an Wer 3 weiter.



Die Angaben können in einer Tabelle dargestellt werden

an / von	Werk 1	Werk 2	Werk 3	Markt
Werk 1	4	10	10	16
Werk 2	12	20	5	63
Werk 3	16	10	15	9

Die Gesamtproduktion beträgt also

In Werk 1: $4 + 10 + 10 + 16 = 40 = x_1$
In Werk 2: $12 + 20 + 5 + 63 = 100 = x_2$
In Werk 3: $16 + 10 + 15 + 9 = 50 = x_3$

Daraus ergibt sich der Produktionsvektor zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$

und aus der letzten Spalte der Tabelle der

Marktabgabevektor zu $\vec{y} = \begin{pmatrix} 16 \\ 63 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Als nächstes sind für die drei Werke die Anteile an der Gesamtproduktion zu bestimmen:
Werk 1; (1. Spalte):
Für eine Gesamtproduktion von 40 benötigt man 4 ME von Werk 1, 12 ME, von Werk2 und 16 ME von Werk 3.
Für eine Gesamtproduktion von x_1 ME also $\frac{4}{40} \cdot x_1$ ME und entsprechend $\frac{12}{40} \cdot x_1$ ME und $\frac{16}{40} \cdot x_1$ ME.

Entsprechend ergeben sich die Werte bei Werk 2 aus der 2. Spalte und die von Werk 3 aus der 3. Spalte. Die Werte sind allerdings auf die Gesamtproduktion der entsprechenden Werke 100 ME bei Werk 2 und 50 bei Werk 3 zu beziehen.
Damit ist die Leontjef-Matrix bestimmt zu

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{40} & \frac{10}{100} & \frac{10}{50} \\ \frac{12}{40} & \frac{20}{100} & \frac{5}{50} \\ \frac{16}{40} & \frac{10}{100} & \frac{15}{50} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E - A = \begin{pmatrix} \frac{9}{40} & \frac{-10}{100} & \frac{-10}{50} \\ \frac{-12}{40} & \frac{80}{100} & \frac{-5}{50} \\ \frac{-16}{40} & \frac{-10}{100} & \frac{35}{50} \end{pmatrix}$$

In der1. Spalte stehen die Beiträge von Werk 1 zu der Gesamtproduktion

Damit kann entsprechend der Gleichung (3) der Marktabgabevektor $\vec{y}$ aus dem Produktionsvektor $\vec{x}$ berechnet werden

$$\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x} \qquad (3)$$

Mit Gleichung (4) ist auch die zweite Frage beantwortet:

$$\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y} \qquad (4)$$

Berechnung des Produktionsvektors $\vec{x}$ aus der Marktnachfrage $\vec{y}$

Beispiel:
Welche Produktmengen $\vec{y}$ können am Markt abgegeben werden, wenn der Produktionsvektor zu

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$ vorgegeben ist

$$\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{9}{40} & \frac{-10}{100} & \frac{-10}{50} \\ \frac{-12}{40} & \frac{80}{100} & \frac{-5}{50} \\ \frac{-16}{40} & \frac{-10}{100} & \frac{35}{50} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 37 \\ 41 \end{pmatrix}$$

Bei der Antwort zu Frage 2 wird die inverse Matrix von $E - A$ benötigt:

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{55}{40} & \frac{9}{40} & \frac{17}{40} \\ \frac{25}{40} & \frac{55}{40} & \frac{15}{40} \\ \frac{35}{40} & \frac{13}{40} & \frac{69}{40} \end{pmatrix}$$

Welche Gesamtproduktion $\vec{x}$ ist einzuplanen, wenn die Marktnachfrage $\vec{y} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$

vorgegeben ist?

$$\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} \frac{55}{40} & \frac{9}{40} & \frac{17}{40} \\ \frac{25}{40} & \frac{55}{40} & \frac{15}{40} \\ \frac{35}{40} & \frac{13}{40} & \frac{69}{40} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 40 \\ 48 \end{pmatrix}$$

Es sind 24 ME von Wert 1, 40 ME von Wert 2 und 48 ME von Werk 3 einzuplanen.