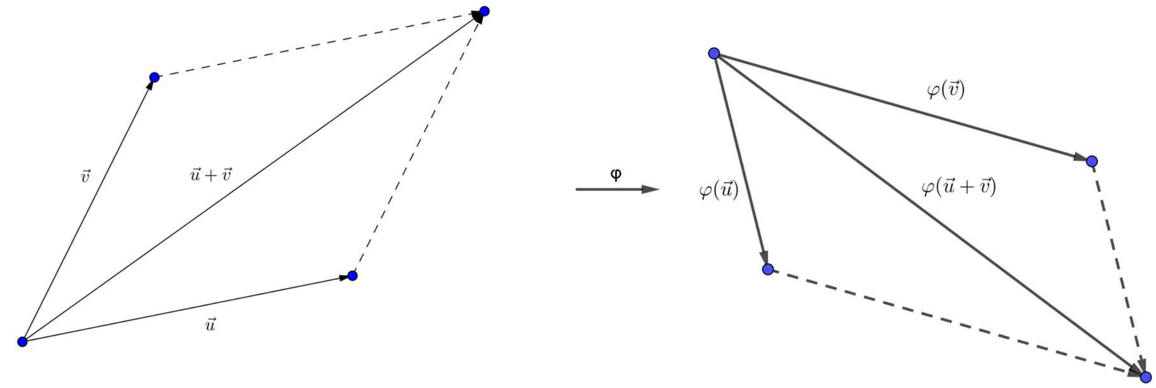
Lineare Abbildungen des R^2 in den R^2, erste Eigenschaften

Unter dem $\boldsymbol{R}^2$ versteht man die Menge aller reellen Zahlenpaare oder mit anderen Worten das kartesische Produkt $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$. Die Zahlenpaare werden dabei nicht als Koordinaten eines Punktes P in der Grundebene aufgefasst, sondern als Ortsvektoren $\overrightarrow{OP}$.
In diesem Kapitel werden Abbildungen betrachtet, die einen Vektor des R^2 auf einen Vektor des R^2 abbilden. Einige dieser Abbildungen sind bereits aus der Elementargeometrie bekannt: Drehungen, Geradenspiegelungen, …
Untersucht werden speziell lineare Abbildungen φ, wobei die Linearität folgendermassen definiert ist:

Definition:
Eine Abbildung φ: $\boldsymbol{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ heisst linear, wenn für alle Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ und alle Skalare $\lambda \epsilon \boldsymbol{R}$ gilt:
I: $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$
II: $\varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda \cdot \varphi(\vec{u})$

Die beiden Eigenschaften drücken aus, dass die Addition zweier Vektoren und die Multiplikation mit einem Skalar mit der Abbildung vertauschbar sind. Diese grundlegende Eigenschaft spielt in der linearen Algebra eine wichtige Rolle.

Geometrisch kann die Eigenschaft I folgendermassen illustriert werden:



Ein Beispiel für die Linearität aus dem Gebiet der Analysis:
Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen:
$(f+g)' = f' + g'$
Multiplikation einer Funktion mit einer reellen Zahl und Ableitung sind vertauschbar:
$(c \cdot f)' = c \cdot f'$
Gegenbeispiel:
Die Ableitung eines Produkts ist nicht gleich dem Produkt der Ableitungen:
$(f \cdot g)' \neq f' \cdot g'$

Aus der Linearität folgt unmittelbar, dass der Nullvektor wieder in den Nullvektor abgebildet wird, denn für einen beliebigen Vektor $\vec{u}$ gilt wegen II
$\varphi(\vec{0}) = \varphi(0 \cdot \vec{u}) = 0 \cdot \varphi(\vec{u}) = \vec{0}$

E1: Der Nullvektor wird in den Nullvektor abgebildet

Im Folgenden schreiben wir abkürzend $\vec{r}$ für den Vektor $\overrightarrow{OP}$ und $\vec{r}\,'$ für sein Bild $\varphi(\vec{r})$.
Hat ein beliebiger Vektor $\vec{r}$ bezüglich der Standardbasis $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Komponenten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \overrightarrow{e_1} + \cdot\, y \cdot \overrightarrow{e_2}$ dann gilt wegen I und II:
$\vec{r}\,' = \varphi(\vec{r}) = \varphi(x \cdot \overrightarrow{e_1} + y \cdot \overrightarrow{e_2}) = \varphi(x \cdot \overrightarrow{e_1}) + \varphi(y \cdot \overrightarrow{e_2}) = x \cdot \varphi(\overrightarrow{e_1}) + y \cdot \varphi(\overrightarrow{e_2})$

E2: Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt.

Kürzen wir die Bilder der Basisvektoren $\varphi(\overrightarrow{e_1})$ mit $\vec{a}$ und $\varphi(\overrightarrow{e_2})$ mit $\vec{b}$ ab, dann können die Abbildungsgleichungen auf die folgenden Arten beschrieben werden:

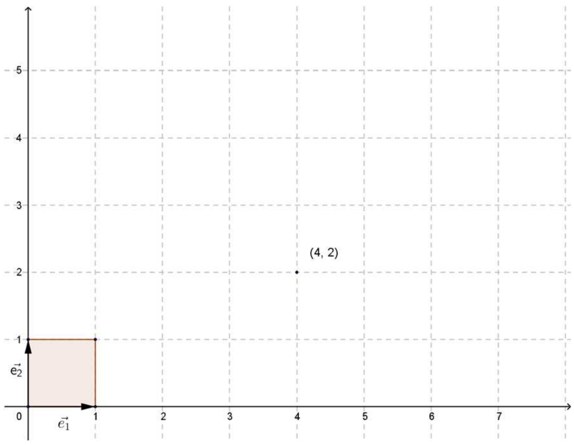
$\vec{r}\,' = x\vec{a} + y\vec{b}$	Vektorform
$x' = a_1 x + b_1 y$ $y' = a_2 x + b_2 y$	Koordinatenform
$\vec{r}\,' = A \cdot \vec{r}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$	Matrizenform

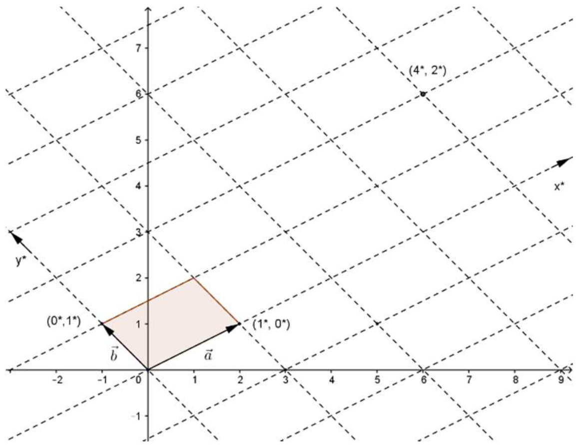
Die Eigenschaften I und II können damit in Matrizenform formuliert werden:
I: $A \cdot (\lambda \cdot \vec{r}) = \lambda \cdot A \cdot (\vec{r})$
II: $A \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = A \cdot (\vec{r}_1) + A \cdot (\vec{r}_2)$

Damit legt jede 2×2 −Matrix bezüglich der Standardbasis eindeutig eine lineare Abbildung fest. In den Spalten von A stehen die Bilder $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der Basisvektoren $\overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{e_2}$. Wird eine andere Basis gewählt, so ändert damit auch die Abbildungsmatrix.

Dazu ein Beispiel:

$$x' = 2x - y \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$y' = x + y$$





Das Bild $\vec{r}'$ eines Vektors $\vec{r}$ kann
rechnerisch mit der Abbildungsgleichung ermittelt werden:
Beispielsweise für den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$:

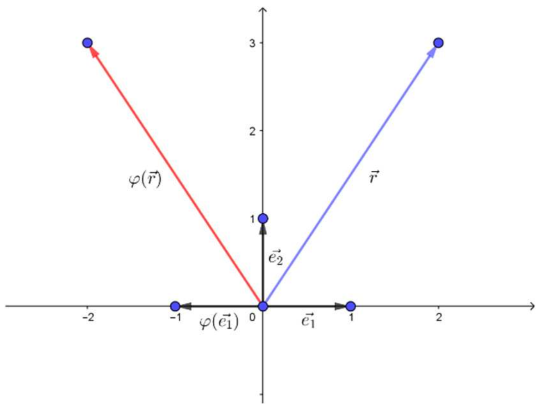
$$A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Das Bild des Vektors $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ kann aber auch erhalten werden, indem man im «neuen» (x*,y*)-Koordinatensystem, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, den Vektor $\begin{pmatrix} 4^* \\ 2^* \end{pmatrix}$ abträgt. Der Bildvektor hat im „alten"-System die Komponenten $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Beispiele von linearen Abbildungen von $\boldsymbol{R}^2$ nach $\boldsymbol{R}^2$

Die Abbildungsgleichungen ergeben sich unmittelbar, wenn die Bilder der Basisvektoren bekannt sind:

1. Spiegelung an der y-Achse:



$$\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit gibt sich die Abbildungsmatrix zu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbildungsgleichung:

$$\vec{r}' = A \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Drehung mit dem Nullpunkt als Zentrum um den Winkel α

Für die Bilder der Basisvektoren gilt:

$\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

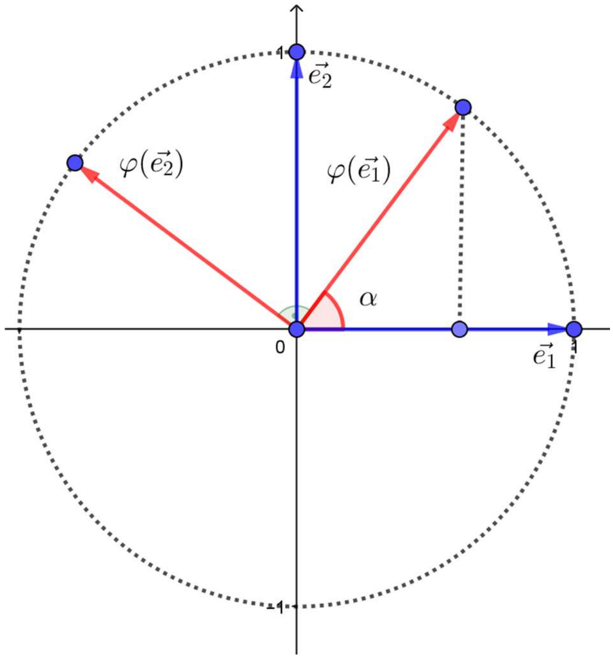
$\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

Abbildungsmatrix

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Abbildungsgleichungen:

$\vec{r}\,' = A \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\ x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}$



Spezialfälle:

$\alpha = \frac{\pi}{2}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$

$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

3. Spiegelung an der Ursprungsgeraden $y = mx$ mit $m = \tan\alpha$

Für die Bilder der Basisvektoren gilt:

$\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix}$

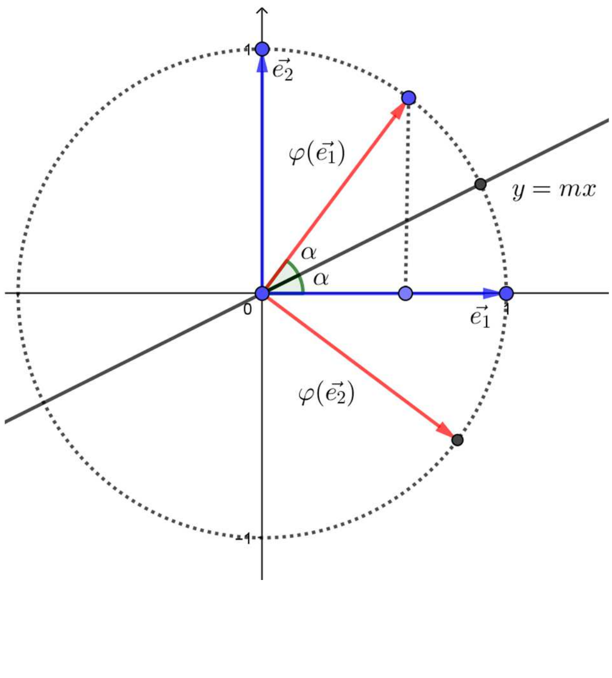
$\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \begin{pmatrix} \sin 2\alpha \\ -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$

Abbildungsmatrix

$A = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$

Abbildungsgleichungen:

$\vec{r}\,' = A \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \\ x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\,\alpha \end{pmatrix}$



Spezialfälle:

$\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. Orthogonalprojektion auf die x-Achse

$$\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildungsgleichungen:

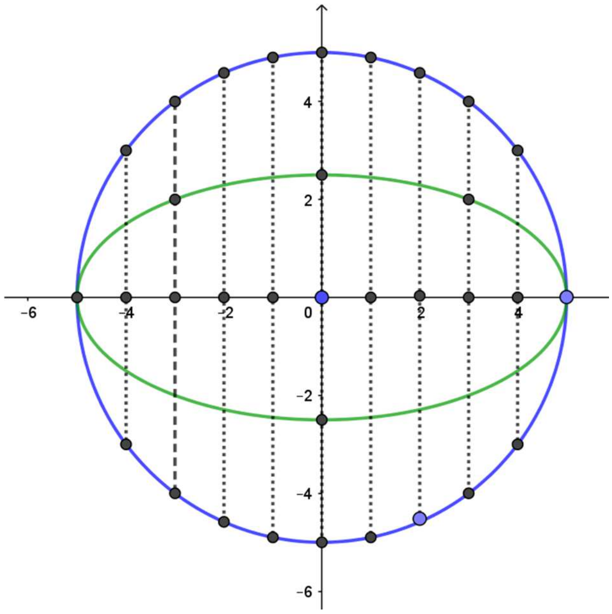
$$\vec{r}\,' = A \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

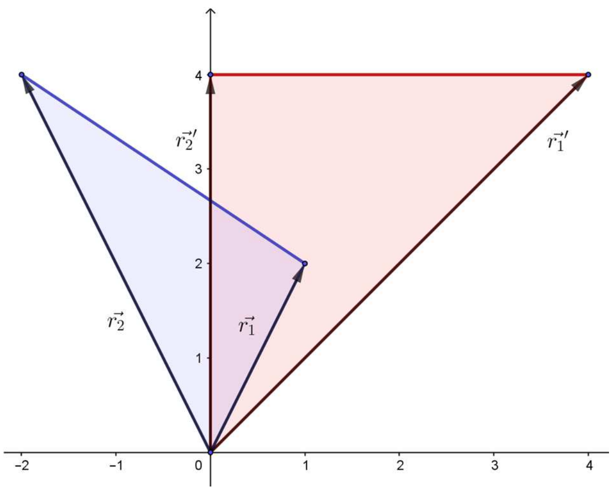
5. Euleraffinität

$$\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$





Aufgabe:
Eine lineare Abbildung bildet den Vektor $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in den Vektor $\vec{r}_1{}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ in den Vektor $\vec{r}_2{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ab.

Lösung:

$1 \cdot a_1 + 2 \cdot b_1 = 4$

$1 \cdot a_2 + 2 \cdot b_2 = 4$

$$-2 \cdot a_1 + 4 \cdot b_1 = 0$$
$$1 \cdot a_2 + 2 \cdot b_2 = 4$$

Die Lösungen der beiden Gleichungsysteme bestimmen die Abbildungsmatrix:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Geometrische Interpretation:
Die lineare Abbildung bildet das von den Vektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ aufgespannte Dreieck auf das Dreieck ab, das von den Vektoren $\vec{r}_1{}'$ und $\vec{r}_2{}'$ aufgespannt wird. Die Aufgabe kann auch geometrisch gelöst werden, indem man aus einer Skizze für die Umkehrabbildung die Bilder der Einheitsvektoren bestimmt.

$$\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Matrix für die Umkehrabbildung $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ und daraus A.

Zusammensetzung von Abbildungen

Einführendes Beispiel:

α: $x' = x - y$, $y' = 2x + y$ Darstellungsmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

β: $x' = 2x - y$, $y' = x + y$ Darstellungsmatrix $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

„zuerst A dann B":
$x'' = 2x' - y' = 2(x - y) - (2x + y) = -3y$
$y'' = x' + y' = x - y + 2x + y \quad = 3x$

Darstellungsmatrix $BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

„zuerst B dann A":
$x'' = x' - y' = 2x - y - (x + y) \quad = x - 2y$
$y'' = 2x' + y' = 2(2x - y) + x + y = 5x - y$

Darstellungsmatrix $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Allgemein:
Werden zwei lineare Abbildungen $R^2 \xrightarrow{\alpha} R^2$ und $R^2 \xrightarrow{\beta} R^2$
mit den darstellenden Matrizen A und B
zusammengesetzt, dann ist auch die Zusammensetzung linear und für die Abbildungsgleichung der zusammengesetzten Abbildung gilt:

$\vec{r}' = B \cdot (A \cdot \vec{r}) = BA \cdot \vec{r}$

Bemerkung:
Die Reihenfolge ist wichtig, denn die Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ:
„zuerst A dann B" entspricht das Matrizenprodukt BA
„zuerst B dann A" das Matrizenprodukt AB.

Beispiel:
Die folgenden drei Abbildungen der Grundebene werden in dieser Reihenfolge hintereinander ausgeführt:
Drehung um den Winkel -α (Darstellungsmatrix A), Spiegelung an der x-Achse (Darstellungsmatrix B), Drehung um den Winkel α (Darstellungsmatrix C).
Um welche Abbildung handelt sich bei der Zusammensetzung?

Der Zusammensetzung entspricht das Matrizenprodukt CBA:

$$CBA = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

Die Zusammensetzung ist also eine Spiegelung an der Ursprungsgeraden, welche mit der x-Achse den Winkel α bildet.

Umkehrbarkeit

Vorbereitende Aufgabe:
Gesucht ist die Gleichung der Umkehrabbildung im folgenden Beispiel:

$x' = 2x + y$
$y' = x + y$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Löst man dieses Gleichungssystem nach x und y auf
so erhält man
$x = x' - y'$
$y = -x' + 2y'$

Zur Kontrolle wird das Produkt der beiden Darstellungsmatrizen
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ gebildet:
$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Die Zusammensetzung ist die Identität.

Allgemein stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen zu einem Bildvektor $\vec{r}\,'$ eindeutig ein Urbild $\vec{r}$ gehört?

$x' = a_1x + b_1y$
$y' = a_2x + b_2y$

Löst man dieses Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren nach x und y auf, so ergibt sich:
$x = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}(b_2x' - b_1y')$
$y = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}(-a_2x' + a_1y')$
Der Ausdruck im Nenner ist gerade die Determinante der Matrix A:

Satz:
Eine lineare Abbildung mit der darstellenden Matrix A ist genau umkehrbar, wenn $det(A) \neq 0$ d.h., wenn die Matrix regulär ist.

Für die Matrix der Umkehrabbildung gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$

Merkregel:
Die Elemente der Hauptdiagonalen werden vertauscht, die Elemente der Nebendiagonale wechseln das Vorzeichen.

Zur geometrischen Bedeutung der Determinante der Abbildungsmatrix

Die Abbildung ist genau dann umkehrbar, wenn die Spaltenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind. Geometrisch bedeutet dies, dass das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm einen von Null verschiedenen Inhalt hat.

Das Einheitsquadrat wird also in ein Parallelogramm mit dem Inhalt $|det(A)|$ abgebildet. Das Vorzeichen der Determinante liefert eine Information über den Orientierungssinn des Parallelogramms. Etwas allgemeiner gilt:

Der Flächeninhalt einer beliebigen Figur wird mit dem Faktor $|det(A)|$multipliziert.
Im Spezialfall $|det(A)| = 1$ ist die Abbildung flächentreu.

Ist $det\ A$ positiv, dann handelt es sich um eine gleichsinnige, andernfalls um eine gegensinnige Abbildung.