Eigenwert, Eigenvektor

In der Regel hat bei einer linearen Abbildung das Bild $\vec{r}\,'$ eines Vektors $\vec{r}$ eine andere Richtung als das Original $\vec{r}$. Bei der Untersuchung der geometrischen Eigenschaften von linearen Abbildungen sind Fixgeraden durch den Nullpunkt von Interesse. In diesem Fall haben der Vektor $\vec{r}$ und sein Bildvektor $\vec{r}\,'$ gleiche Richtung d.h. es gibt eine reelle Zahl λ mit der Eigenschaft: $\vec{r}\,' = A\vec{r} = \lambda\vec{r}$ **.** In diesem Fall heisst $\vec{r}\,'$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Definition:
Eine reelle Zahl λ heisst Eigenwert der Matrix A, wenn die Gleichung $A\vec{r} = \lambda\vec{r}$ eine vom Nullvektor verschiedene Lösung hat. $\vec{r}$ heisst in diesem Fall Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ.

Einführendes Beispiel:
Gegeben ist eine lineare Abbildung φ in der Grundebene, die bezüglich des Standard-Koordinatensystems die folgende Gleichung hat:
$\vec{r}\,' = A \cdot \vec{r}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Frage:
Für welche Werte für λ gibt es einen Vektor $\vec{r}$ so, dass die Gleichung $\vec{r}\,' = A \cdot \vec{r} = \lambda \cdot \vec{r}$ erfüllt ist?
In Komponenten ausgedrückt muss dann gelten:

$$\begin{aligned} x' &= 2x + \ \ y = \lambda x) & \qquad (2-\lambda)x + \qquad\quad y &= 0 \\ y' &= \ \ x + 2y = \lambda y & x + (2-\lambda)y &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Dieses homogene lineare Gleichungssystem hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante der folgenden Matrix den Wert 0 hat :

$$det(A - \lambda E) = det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

Geometrische Interpretation :
Das von den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2-\lambda \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm muss den Inhalt 0 haben.
Wegen $(2-\lambda)^2 = 1$ oder $2 - \lambda = \pm 1$
ergeben sich die gesuchten Eigenwerte zu $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$

Bemerkung:
Dasselbe Resultat ergibt sich auch mit dem Additionsverfahren.

Setzt man die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$ in (1) ein, so erhält man das Gleichungssystem:

1. Eigenwert: $\lambda_1 = 1$ 2. Eigenwert: $\lambda_2 = 3$

$$\begin{aligned} x + \ y &= 0 \quad (3) \\ x + \ y &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -x + \ y &= 0 \quad (4) \\ x - \ y &= 0 \end{aligned}$$

Jede der Gleichungen von (3) bzw. (4) stellt eine Gerade dar, die Gleichungen der Fixgeraden der Abbildung.

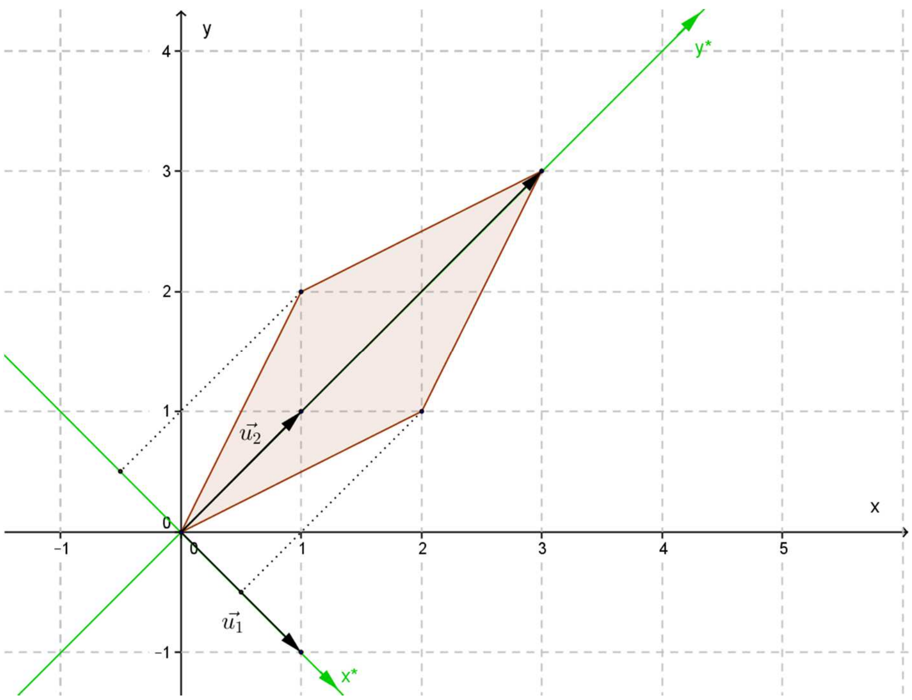
Eigenvektoren sind alle Vektoren der Form $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, deren Komponenten das Gleichungssystem (3) bzw. (4) erfüllen. Sie ergeben sich leicht, wenn die Gleichungen (3) bzw. (4) als Skalarprodukt interpretiert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (3') \qquad\qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (4')$$

d.h. der gesuchte Vektor muss auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$senkrecht stehen. Dazu wählt man etwa für den 1. Eigenvektor z.B. $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und für den 2. $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Mit jedem Eigenvektor ist auch jedes Vielfache ein Eigenvektor.

In der folgenden Abbildung sind die geometrischen Zusammenhänge dargestellt:

Bekanntlich bildet eine lineare Abbildung ein Quadratgitternetz in ein Parallelogramm-gitternetz ab. In der Abbildung ist das Bild des Einheitsquadrats dargestellt. Die Spalten der Matrix A spannen das Parallelogramm auf.



Im grün dargestellten Koodinatensystem kann das Bild eines Vektors leicht bestimmt werden: Seine x*-Komponente bleibt erhalten ($\lambda_1 = 1$) . Seine y*-Komponente wird mit 3 multipliziert ($\lambda_2 = 3$).

Allgemeiner Fall:

Die Eigenvektoren erfüllen die Bedingung $\vec{r}' = A\vec{r} = \lambda\vec{r}$ oder auch $(A - \lambda E)\cdot\vec{r} = 0$
Das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{r} (a_1 - \lambda)x + \quad b_1 y = 0 \\ a_2 x + (b_2 - \lambda)y = 0 \end{array} \right| \qquad (*)$$

hat genau dann nicht triviale Lösungen, wenn die zugehörige Determinante verschwindet:

$$\det\begin{pmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$(a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1 = 0$ oder
$a_1 b_2 - a_1\lambda - b_2\lambda + \lambda^2 - a_2 b_1 = 0$ oder
$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$

Die Summe der Diagonalenelemente heisst Spur der Matrix und wird mit sp(A) bezeichnet.
Das konstante Glied ist gerade die Determinante der Matrix A abgekürzt det(A).

> Satz:
> Die Eigenwerte der Matrix A sind die Lösungen der Gleichung
> $\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$ oder kurz $\lambda^2 - sp(A) + \det(A) = 0$

Diese Gleichung heisst charakteristische Gleichung der Matrix A.
Je nach Wert der Diskriminante hat diese quadratische Gleichung genau zwei, eine oder keine reelle Lösung. Die zugehörigen Eigenvektoren erhält man durch Einsetzen in die Gleichung (*).

Bemerkung 1:
Eigenvektoren sind nur bis auf reelle Vielfache bestimmt. Die Linearkombinationen der Eigenvektoren bilden den sogenannten Eigenraum

Bemerkung. 2:
Die charakteristische Gleichung kann wegen (*) auch der Form $\det(A - \lambda E) = 0$ geschrieben werden.

Beispiele:

a) zwei verschiedene Eigenwerte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 2$ $\quad \left| \begin{matrix} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{matrix} \right| 3 \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -1$ $\quad \left| \begin{matrix} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{matrix} \right| 3 \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) genau ein Eigenwert

b1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$ hat genau eine die Lösung $\lambda = 5$

Zugehöriger Eigenvektor: $\quad \left| \begin{matrix} -2x + 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{matrix} \right| \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b2)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ hat genau eine die Lösung $\lambda = 4$

Zugehöriger Eigenvektor: $\quad \left| \begin{matrix} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{matrix} \right|$ $\quad$ Jeder Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor.

geometrische Interpretation:
Es handelt sich um eine zentrische Streckung mit Zentrum (0,0) und Massstab $\lambda = 4$. Jede Ursprungsgerade ist Fixgerade der Abbildung. Eine beliebige Gerade wird auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet.

c) Matrix ohne Eigenwert

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ hat keine reelle Lösung.

Geometrische Interpretation:
Keine Gerade wird auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet.

Es kann gezeigt werden, dass die Eigenwerte unabhängig von der Wahl der Basis eindeutig bestimmt sind. Sind die Eigenwerte und damit auch die Eigenvektoren bekannt, dann steht auch der geometrische Charakter der Abbildung fest. Zu klären bleiben die Fragen:
a) Wie findet man bei einem Basiswechsel die darstellende Matrix?
b) In welchen Fällen kann die Basis so gewählt werden, dass die darestellende Matrix Diagonalmatrix ist?

Eine Anwendung dazu:

Gekoppelte Differentialgleichungen

Beispiel:
Gesucht sind zwei reelle Funktionen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ so dass gilt:
$y_1' = 3y_1 - 2y_2{}'$
$y_2' = 2y_1 - 2y_2$

Dieses System kann mit Matrizen geschrieben werden:
$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ (1)

Da die Differentialgleichung $y' = ay$ die Lösung $y(x) = c \cdot e^{ax}$ wählt man für die Lösungen des Systems den Ansatz:
$y_1(x) = c_1 e^{\lambda x}$ und $y_2(x) = c_2 e^{\lambda x}$ oder in Matrixform
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$
Für die Ableitungen gilt dann
$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \lambda E \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$
Wegen (1) gilt auch:
$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda x} A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$
Das System der zwei Differentialgleichungen ist demnach erfüllt, wenn λ ein Eigenwert der Matrix A ist. .
Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$ ergibt die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$
Für die Eigenvektoren erhält man
$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Die allgemeine Lösung des Systems von Differentialgleichungen besteht nun aus allen möglichen Linearkombinationen dieser Eigenvektoren:
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha \cdot e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit α, β ∈ $\boldsymbol{R}$