

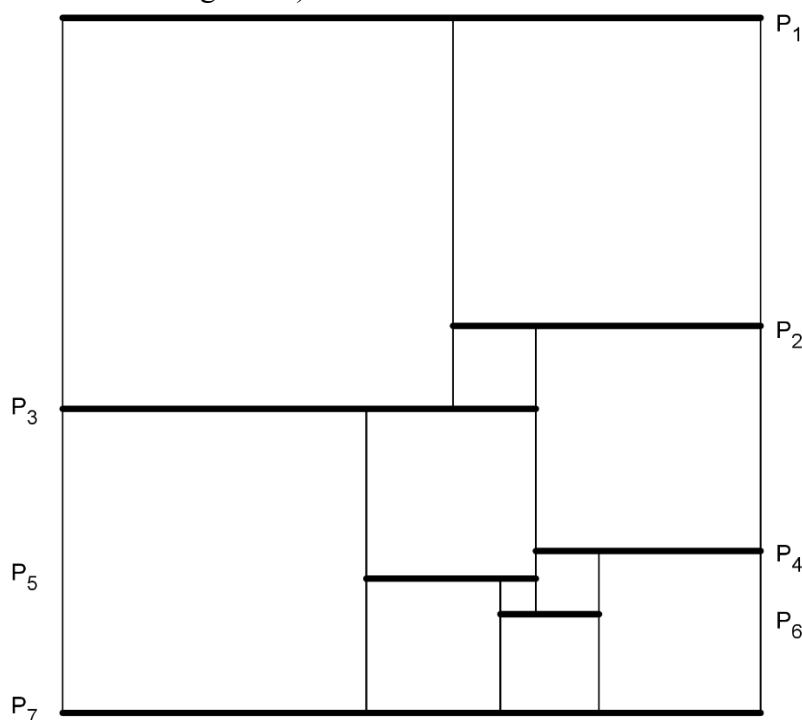
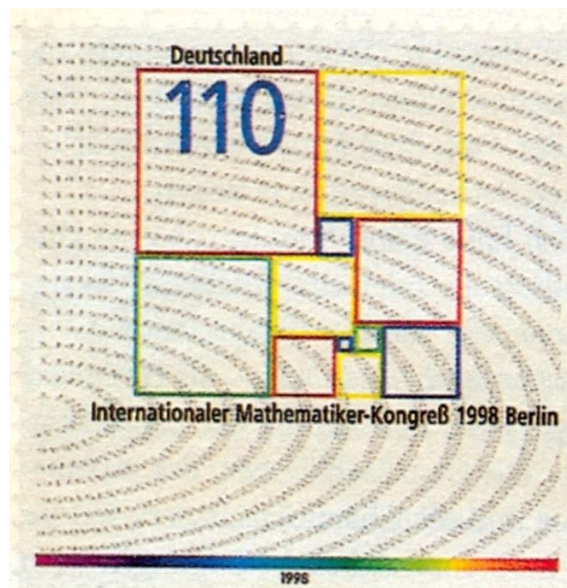
Zerlegung eines Rechtecks in Quadrate Das Verfahren von Brooks, Smith Stone und Tutte

Aus Anlass des internationalen Mathematiker-Kongresses ICM 1998 in Berlin wurde eine 110 Pfennig Briefmarke herausgegeben. Darauf abgebildet ist ein Rechteck, das so in Quadrate zerlegt werden soll, dass keine zwei Quadrate die gleiche Seitenlänge haben.

Das Problem hat nicht nur eine kombinatorische Komponente (Wahl der Seitenlängen), sondern es kommt auch auf die gegenseitige Lage der Quadrate an. Eine Lösung des Problems durch Probieren zu finden ist eher schwierig.

1940 gelang es den im Titel erwähnten Autoren, das Zerlegungsproblem auf die Berechnung elektrischer Netzwerke (Kirchhoffsche Regeln) zurückzuführen. Im Folgenden wird das Verfahren am Beispiel der Briefmarke zum ICM 1998 erläutert.

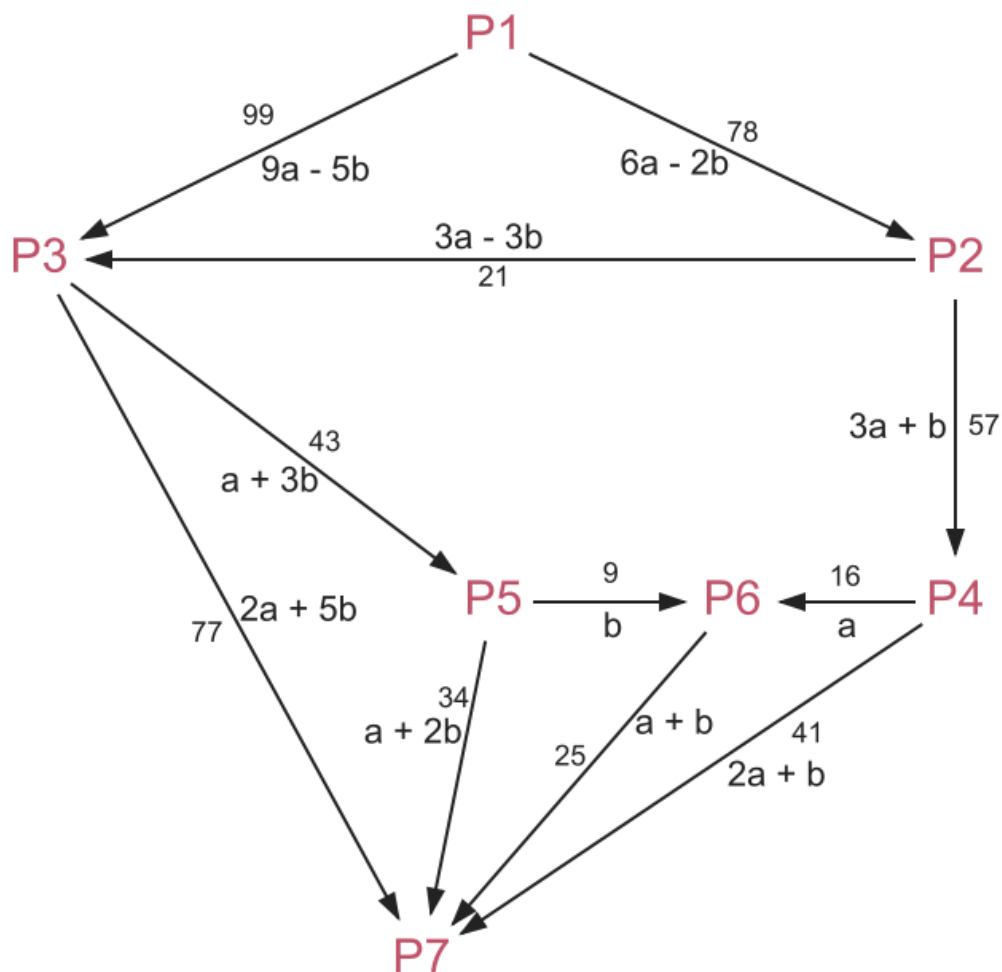
(Quelle: R. Schorn PdM 3/41 Jg. 1999)



Figur 1

In Figur 1 sind alle horizontalen Quadratseiten hervorgehoben. Man kann sich ein Wasserkanalsystem vorstellen, das – von Reservoir P1 ausgehend – durch verschiedene Kanäle geleitet ohne Verluste schliesslich Reservoir P7 erreicht. Die Reservoirs P1 bis P7 sind in Figur 2 als Punkte (Knoten) dargestellt. Den Verbindungen (Kanäle, Kanten) zwischen zwei angrenzenden Quadraten entsprechen die Ströme zwischen zwei der Reservoirs. Den Strömen entsprechen die Kanten im Netz (ein Graph \rightarrow Graphentheorie). Der Wasserfluss etwa, der von P1 nach P2 fließt, teilt sich dort in die Ströme nach P3 und P4 auf.

In der Originalliteratur bei Schorn wird dieses Netz als Stromnetz interpretiert. Es gelten dann die Kirchhoffschen Regeln mit der Knotenregel und der Maschenregel.



Figur 2

Ein Beispiel zur Knotenregel in P6
(Zufluss = Abfluss)

$$I_{46} + I_{56} = I_{67}$$

Bezeichnet man zur Abkürzung
 I_{46} mit a und I_{56} mit b , so ergibt sich
 $I_{67} = I_{46} + I_{56} = a + b$

Es gilt aber auch die Maschenregel im Kreislauf von P4 nach P6 und P7 nach P4

$$I_{47} = I_{46} + I_{67} = a + (a + b) = 2a + b$$

Fährt man mit diesen beiden Regeln fort, so erhält man für die Ströme die in Figur 2 angegebenen Werte. Die grösste Masche führt von P2 über P4, P6, P5, P3 nach P2 zurück.

Mit der Knotenregel in P3 erhält man schliesslich die folgende Gleichung:

$$(9a - 5b) + (3a - 3b) = (2a + 5b) + (a + 3b)$$

oder vereinfacht

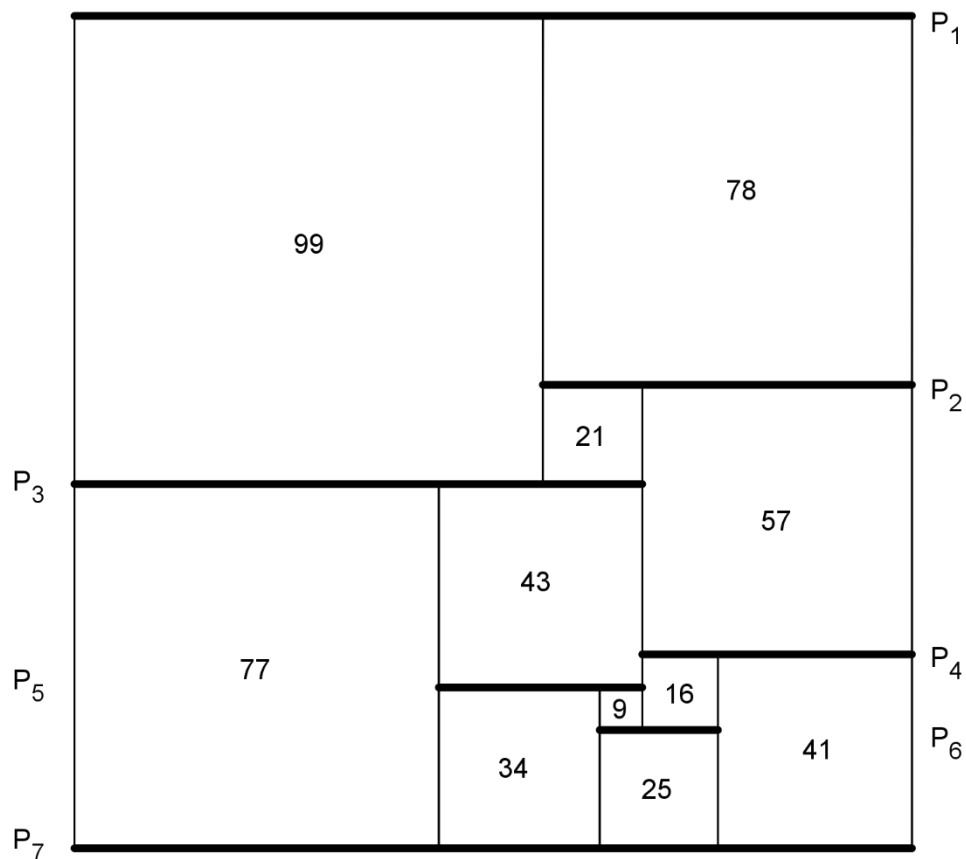
$$9a = 16b$$

Schreibt man die Gleichung um zu

$$9 \cdot a = b \cdot 16$$

so ergibt sich die kleinste Lösung dieser diophantischen Gleichung zu $a = 16$ und $b = 9$.

Die Lösungen sind in der nächsten Figur dargestellt, wobei die Seitenlängen in der Quadratmitte angegeben werden.



Allgemeines Vorgehen: Zerlegung eines Rechtecks in Quadrate

Eine einfache Methode der Zerlegung, die in vielen Fällen zum Ziel führt, findet sich im Internet bei www.squaring.net.

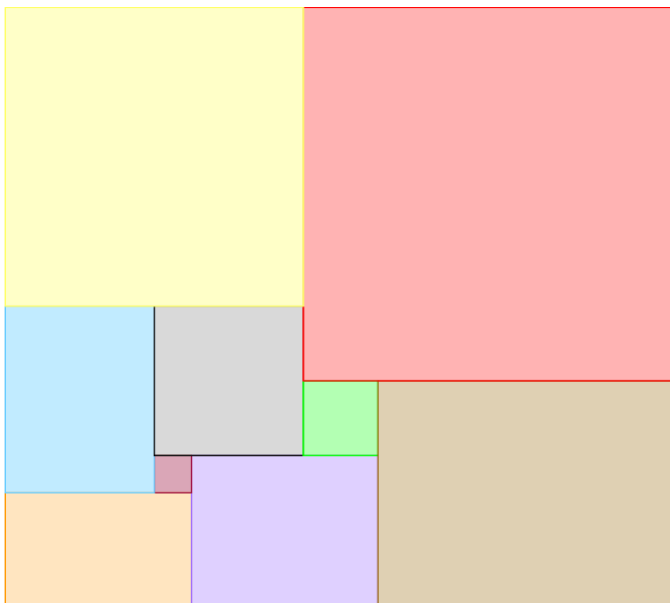
Die Methode wird an einem Beispiel illustriert, das Zbigniew Moron 1925 publiziert hat.

Vorgehen:

Zunächst wird ein Rechteck gezeichnet.

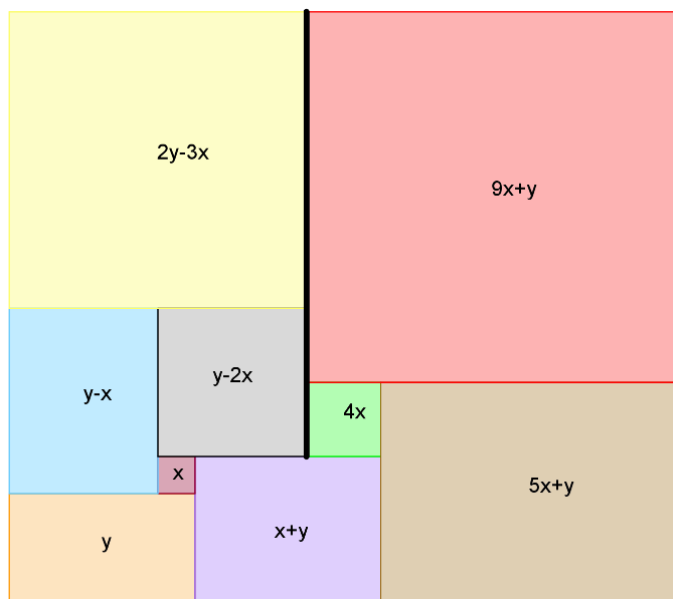
In einer Ecke wird ein erstes Quadrat gezeichnet und nach und nach weitere. Dabei sollten Symmetrien vermieden werden. Nach und nach wird es schwieriger weitere Quadrate zu ergänzen, weswegen vorerst auch Rechtecke zugelassen sind.

Auf diese Weise entsteht ein Netz von 9 Quadraten oder Rechtecken.



Es werden zwei angrenzende Rechtecke gewählt, deren Seitenlängen möglichst klein sind.

Alle Rechtecke werden im Folgenden behandelt, wie wenn es sich um Quadrate handeln würde). Die Seitenlänge des kleineren Quadrats wird mit x , die des grösseren mit y bezeichnet. So können nach und nach die Seitenlängen der Nachbarquadrate als Linearkombinationen von x und y ausgedrückt werden (allenfalls sind bei anderen Beispielen weitere Variablen u , v nötig).



Für die schwarze Linie gilt, weil von links und von rechts dieselbe Länge entstehen muss:

$$(-3x + 2y) + (-2x + y) = (9x + y) + 4x$$

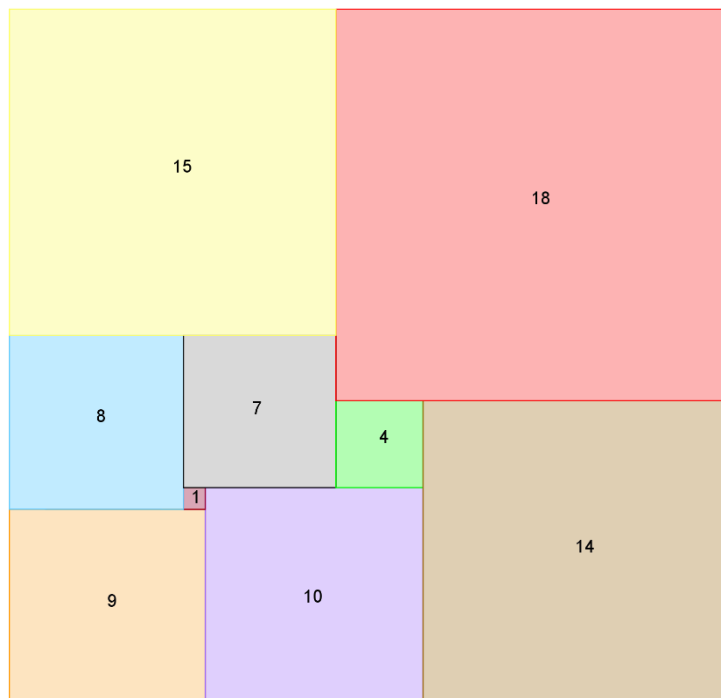
Oder vereinfacht

$$9 \cdot x = y \cdot 1$$

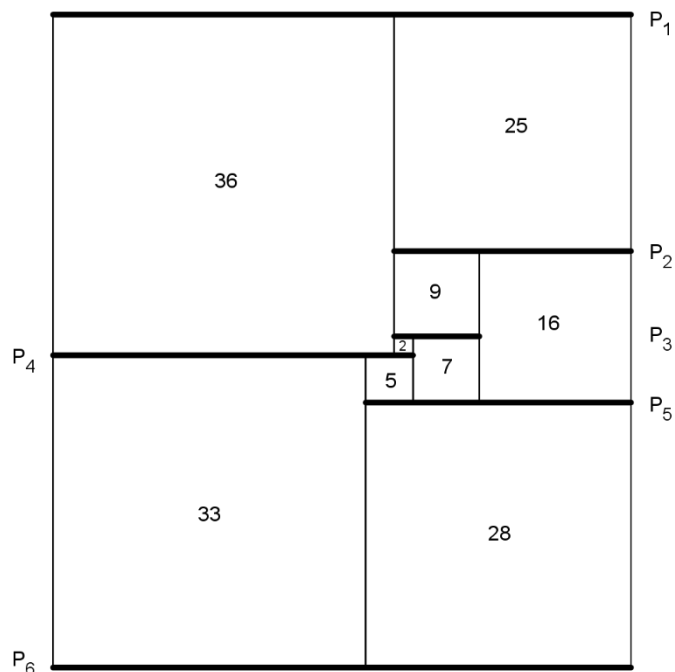
In dieser Schreibweise ist die kleinste Lösung der diophantischen Gleichung leicht zu erkennen:

$$x = 1 \text{ und } y = 9$$

Damit ergibt sich die gewünschte Zerlegung. Das Rechteck hat die Seiten 33 und 32.



Es gibt genau eine weitere Lösung zur Zerlegung in 9 Quadrate:
 Das Rechteck rechts mit den Seiten 69 und 61 wird in 9 Quadrate zerlegt.
 Es kann gezeigt werden, dass kein Rechteck in weniger als 9 verschiedene Quadrate zerlegt werden kann.



Bei den bisher betrachteten Lösungen wurde ein Rechteck in verschiedene Quadrate zerlegt.

Mit Hilfe von Programmen fand **Duijvestijn** 1978 in seiner Dissertation die perfekte Zerlegung eines **Quadrats** kleinster Ordnung (d. h. mit minimaler Anzahl der Quadrate; Quelle: www.squaring.net) Es hat die Ordnung 21 und ist rechts abgebildet.

