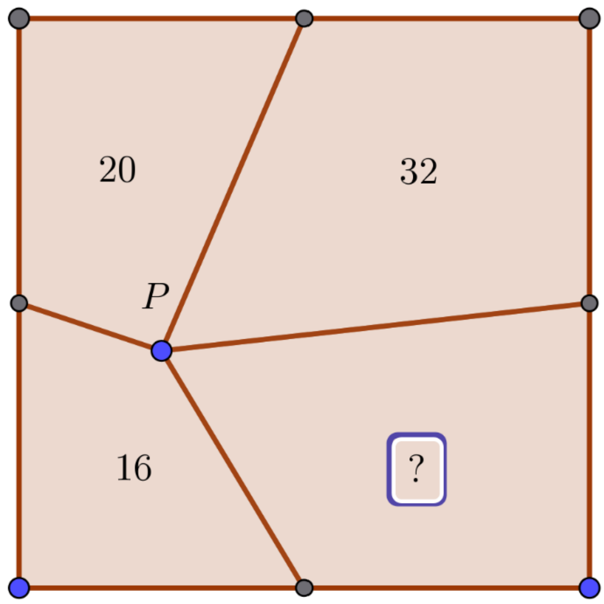
Eine Aufgabe von Susanne (YouTube)

Das abgebildete Quadrat mit der Seite $2a$ wird von den Mittelpunkten der Seiten und vom Punkt P im Innern des Quadrats in vier Vierecke unterteilt. Gegeben sind die Inhalte $I_1 = 16$, $I_2 = 20$ und $I_3 = 32$. Welchen Inhalt hat I_4?

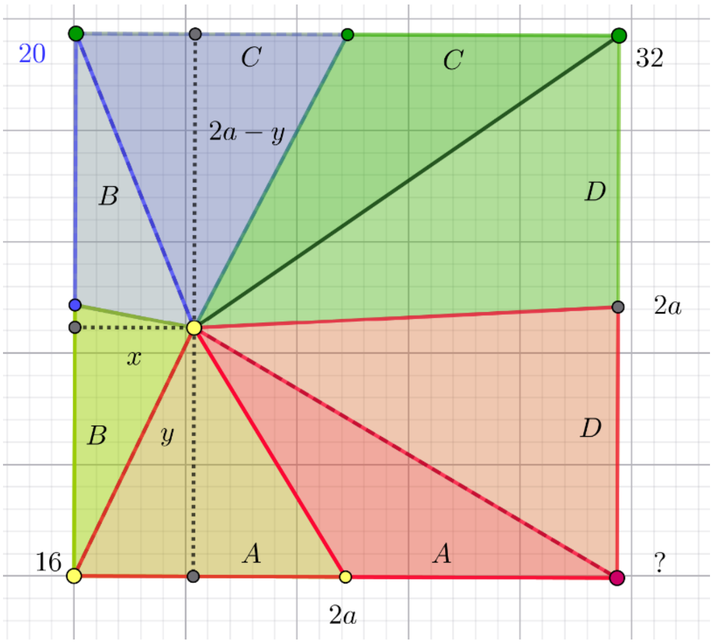


Lösung:

Verbindet man den Punkt P mit den Eckpunkten des Quadrats so entstehen die Dreiecke mit den Flächen A, B, C, D.

Man erkennt, dass die Gesamtfläche aus $2A + 2B + 2C + 2D$ besteht. Also ist $I_1 + I_3 = A + B + C + D$ genau die Hälfte des Quadrats, womit $I_2 + I_4$ nochmals gleich viel sein muss. Es gilt $I_4 = I_1 + I_3 - I_2 = 16 + 32 - 20 = 28$.

Die Gesamtfläche beträgt somit $4a^2 = 2 \cdot (16 + 32) = 96$. Damit ist auch $a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ bekannt.



Damit ist die Frage von Susanne beantwortet. Nicht erklärt ist, wie die Quadratseite $2a$ und die Lage des Punktes P bestimmt werden können.

Dazu werden die Flächen der Dreiecke A, B, C, D in den Parametern a, x und y dargestellt. Sie haben alle die gleiche Grundseite a. Ihre Höhe kann in x bzw. y ausgedrückt werden. Für die Flächen A, B, C, D gilt:

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot y \qquad B = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot x \qquad C = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot (2a - y) \qquad D = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot (2a - x)$$

Kontrolle:
$2 \cdot (A + B + C + D) = 4a^2$

Daraus ergeben sich die Flächen der Vierecke:

$$I_1 = A + B = \frac{1}{2} \cdot a \cdot y + \frac{1}{2} \cdot a \cdot x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (x + y) = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot x + a \cdot y)$$

$$I_2 = B + C = \frac{1}{2} \cdot a \cdot x + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (2a - y) = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot x - a \cdot y + 2a^2)$$

$$I_3 = C + D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (2a - y) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (2a - x)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (4a - x - y) = \frac{1}{2} \cdot (-a \cdot x - a \cdot y + 4a^2)$$

$$I_4 = D + A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (2a - x) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (2a - x + y) = \frac{1}{2}(-a \cdot x + a \cdot y + 2a^2)$$

Sind etwa a und I_1 gegeben, dann kann die Gleichung

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (x + y) = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot x + a \cdot y)$$

als Geradengleichung aufgefasst werden:

$$g_1: y = -x + \frac{2 \cdot I_1}{a}$$

Auf dieser Geraden liegen im Quadrat mit der Seite $2a$ alle Punkte P, für die z. B. $I_1 = 16$ gilt.

Gleichungen der übrigen Geraden:

$$g_2: y = \quad x + 2a - \frac{2 \cdot I_2}{a}$$

$$g_3: y = -x + 4a - \frac{2 \cdot I_3}{a}$$

$$g_4: y = \quad x - 2a + \frac{2 \cdot I_4}{a}$$

Eine Überprüfung zeigt, dass die Geradengleichungen g_1 und g_3 dieselbe Gerade darstellen. Dies gilt ebenso für g_2 und g_4.

Zu jedem zulässigen a gibt es einen Punkt $P(x, y)$, dessen Koordinaten nun bestimmt werden.

Aus der Gleichung für I_1 folgt
$a \cdot x + a \cdot y = 2 \cdot I_1$ oder

1) $a = \dfrac{2 \cdot I_1}{x + y}$

Subtrahiert man die Gleichung von I_2 von der Gleichung für I_1

$$\begin{aligned} a \cdot x + a \cdot y \qquad &= \ \ 2 \cdot I_1 \\ -a \cdot x + a \cdot y - 2a^2 &= -2 \cdot I_2 \end{aligned}$$

so erhält man

2) $\quad 2a \cdot y - 2a^2 = 2(I_1 - I_2)$

Löst man Gleichung 2) nach y auf, so erhält man

$$y = \frac{2a^2 + 2(I_1 - I_2)}{2a} = a + \frac{I_1 - I_2}{a}$$

Aus 1) folg $2 \cdot I_1 = a \cdot x + a \cdot y$ und damit:

$$x = \frac{2 \cdot I_1}{a} - y = \frac{2 \cdot I_1}{a} - \left(a + \frac{I_1 - I_2}{a}\right) = -a + \frac{I_1 + I_2}{a}$$

Der Punkt P hat also die Koordinaten

$$P\left(-a + \frac{I_1 + I_2}{a}, a + \frac{I_1 - I_2}{a}\right)$$

Damit bleibt noch die Frage zu klären, auf welchem geometrischen Ort die Punkte P liegen, wenn sich a im zulässigen Bereich ändert:

Ausgangspunkt sind die Gleichungen

1) $a = \frac{2 \cdot I_1}{x+y}$ oder $\frac{1}{a} = \frac{x+y}{2 \cdot I_1}$

2) $a \cdot x - a \cdot y + 2a^2 = 2 \cdot I_2$

oder nach Division durch a

$$(x - \quad y) \quad + \ 2a \qquad = \frac{2 \cdot I_2}{a}$$

$$x - y \qquad + \frac{4 \cdot I_1}{x+y} \qquad = \frac{2 \cdot I_2}{2 \cdot I_1} \cdot (x+y) \qquad | \cdot (x+y)$$

$$(x+y) \cdot (x-y) + \frac{4 \cdot I_1}{x+y} \cdot (x+y) \qquad = \frac{2 \cdot I_2}{2 \cdot I_1} \cdot (x+y)^2$$

vereinfacht

$$x^2 - y^2 - \frac{I_2}{I_1} \cdot (x^2 + 2x \cdot y + y^2) \qquad = -4 \cdot I_1$$

$$\left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right) x^2 - y^2 \left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right) - 2 \cdot \frac{I_2}{I_1} x \cdot y = -4 \cdot I_1$$

Im Beispiel ist $I_1 = 16$ und $I_2 = 20$.

$$\left(1 - \frac{5}{4}\right) x^2 - y^2 \left(1 + \frac{5}{4}\right) - 2 \cdot \frac{5}{4} x \cdot y = -64$$

Mit (-4) multipliziert:

$x^2 + 9y^2 + 10x \cdot y = 256$

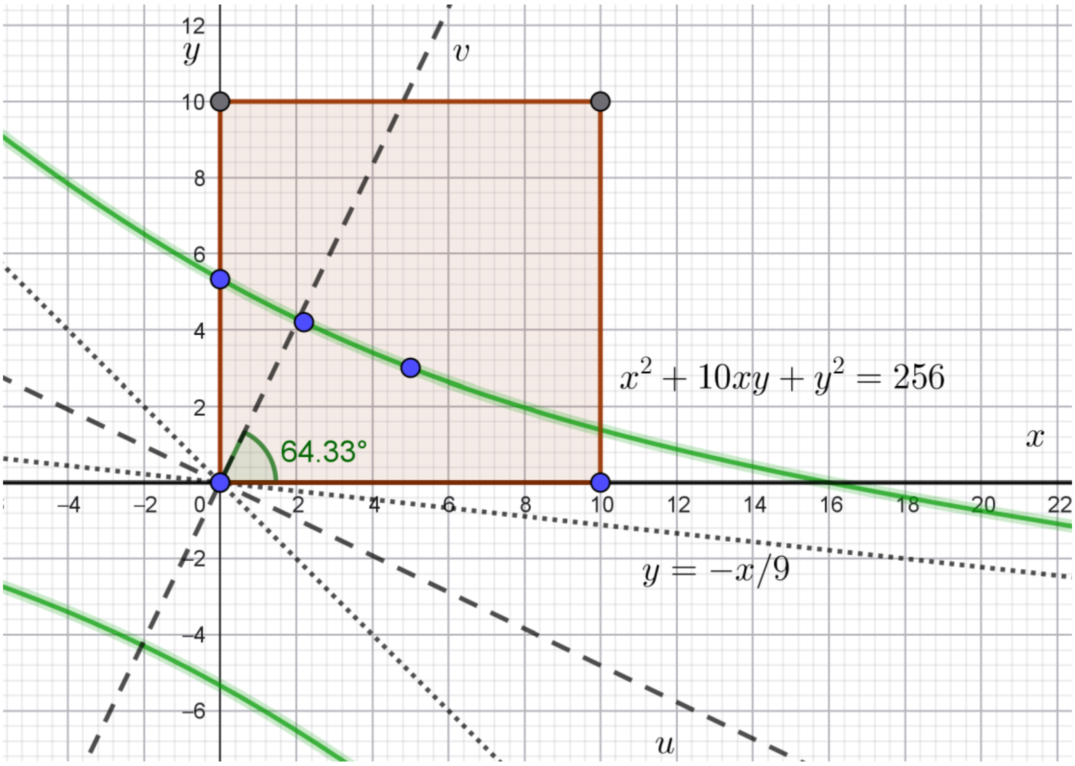
In Abhängigkeit von der Quadratseite $2a$ liegen also die P auf einem Kegelschnitt.
Im Kapitel Lineare Algebra wird gezeigt, dass es sich um einen Hyperbelast handelt. Dort werden auch die reelle und die imaginäre Achse und die Asymptoten bestimmt.

In der Tabelle sind für verschiedene Werte von a und $I_1 = 16$ bzw. $I_2 = 20$ einige ganzzahlige Lösungen für die Flächen der 4 Vierecke angegeben.

a	l1	l2	x	y	l3	l4	x,y,max
3.30	16	20	7.61	2.09	5.78	1.78	6.60
3.40	16	20	7.19	2.22	7.12	3.12	6.80
3.50	16	20	6.79	2.36	8.50	4.50	7.00
3.90	16	20	5.33	2.87	14.42	10.42	7.80
4.00	**16**	**20**	**5**	**3**	**16**	**12**	**8.00**
4.10	16	20	4.68	3.12	17.62	13.62	8.20
4.90	16	20	2.45	4.08	32.02	28.02	9.80
5.00	**16**	**20**	**2.20**	**4.20**	**34**	**30**	**10.00**
5.10	16	20	1.96	4.32	36.02	32.02	10.20
6.00	**16**	**20**	**0.00**	**5.33**	**56**	**52**	12.00
6.10	16	20	-0.20	5.44	58.42	54.42	12.20

In der folgenden Abbildung ist das Quadrat mit der Seite $2a$ gezeichnet und die Hyperbel. Auf dieser Hyperbel liegen die Punkte P, die der Tabelle entnommen werden können:

$P(0, 5.33), P(2.2, 4.2)$ und $P(5,3)$.



Bei der folgenden Tabelle wurde I_2 verändert zu $I_2 = 24$.

a	l1	l2	x	y	l3	l4	x,y,max
3.40	16	24	8.36	1.05	7.12	-0.88	6.80
3.50	16	24	7.93	1.21	8.50	0.50	7.00
3.90	16	24	6.36	1.85	14.42	6.42	7.80
4.00	**16**	**24**	**6**	**2**	**16**	**8**	8.00
4.10	16	24	5.66	2.15	17.62	9.62	8.20
5.00	**16**	**24**	3.00	3.40	**34**	**26.00**	10.00
5.10	16	24	2.74	3.53	36.02	28.02	10.20
5.90	16	24	0.88	4.54	53.62	45.62	11.80
6.00	**16**	**24**	**0.67**	**4.67**	**56**	**48**	12.00
6.30	16	24	0.05	5.03	63.38	55.38	12.60
6.40	16	24	-0.15	5.15	65.92	57.92	12.80

Offene Frage: Wie findet man weitere Lösungen mit ganzzahligen Flächen?