Sphärische Geometrie und Trigonometrie

Die Sphärische Trigonometrie befasst sich mit der Berechnung von Kugeldreiecken. Sie ist von Astronomie und Seefahrern entwickelt worden, um die Lage von Punkten und Entfernungen zwischen diesen sowie Winkel auf der Himmelssphäre oder auf der als kugelförmig gedachten Erdoberfläche bestimmen zu können.

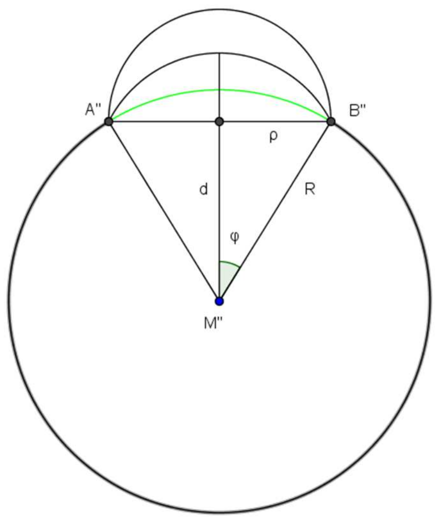
1. Grundbegriffe

Grosskreis, Kleinkreis

Im Folgenden wird als Modell für die Kugel die Erde bzw. ein Globus mit Radius R = 1 und Nordpol N bzw. Südpol S verwendet. Eine Ebene berühre die Kugel im Nordpol N. Wird die Ebene parallel in Richtung des Südpols verschoben, so schneidet sie die Kugel in Kreisen mit Radius r, den sogenannten Breitenkreisen. Im Mittelpunkt M schneidet 4ie die Ebene im grösstmöglichen Kreis, dem Äquator, dessen Radius mit dem Kugelradius R übereinstimmt. Zum Südpol hin nimmt anschliessend der Kreisradius wieder ab. Allgemein heissen Kreise, deren Ebenen durch M verlaufen Grosskreise, alle andern Kleinkreise.

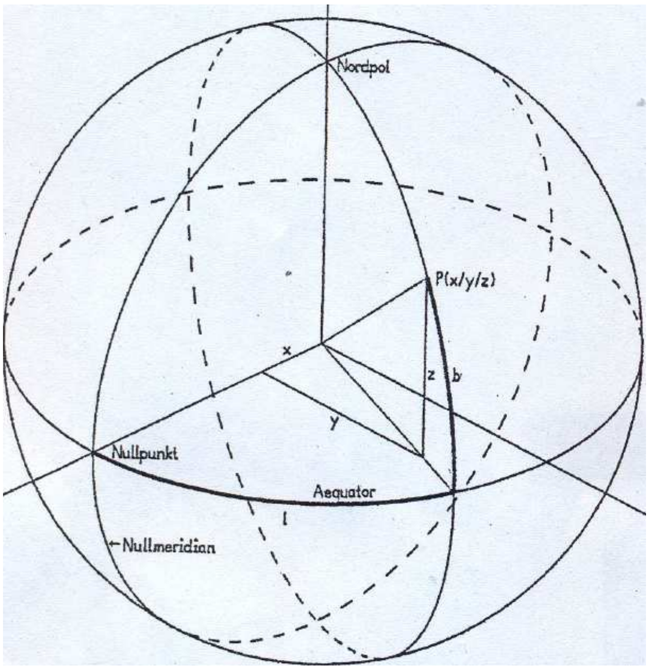
Entfernung zweier Kugelpunkte

A und B sind zwei beliebige Kugelpunkte, aber keine Gegenpunkte. Dreht sich eine Ebene um die Achse AB so schneidet sie die Kugel in Kleinkreisen (kleinster Radius $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ oder in einem Grosskreis (Ebene durch M). Klappt man alle Schnittkreise in die Grosskreisebene um, so ist anschaulich klar, dass die kürzeste Verbindung von A und B durch den kleineren der beiden Grosskreisbogen dargestellt wird. Seine Länge bezeichnen wir als Entfernung der Punkte A und B auf der Kugel. Die Grosskreise spielen auf der Kugel somit dieselbe Rolle wie die Geraden in der Ebene, sie enthalten die kürzesten Verbindungen zweier Punkte (Geodätische).



2. Das geografische Koordinatensystem

Im Modell der Erde ist der zum Äquator senkrechte Grosskreis durch die Sternwarte von Greenwich ausgezeichnet. Der durch Nordpol N, Greenwich und Südpol S festgelegte Bogen heisst Nullmeridian. Der durch einen beliebigen Punkt P, N und S festgelegte Bogen heisst Meridian von P. Der zum Äquator parallele Kreis durch P heisst Breitenkreis von P.
Der Winkel λ zwischen dem Nullmeridian und dem Meridian von P heisst geografische Länge von P, der Winkel φ heisst geografische Breite von P.

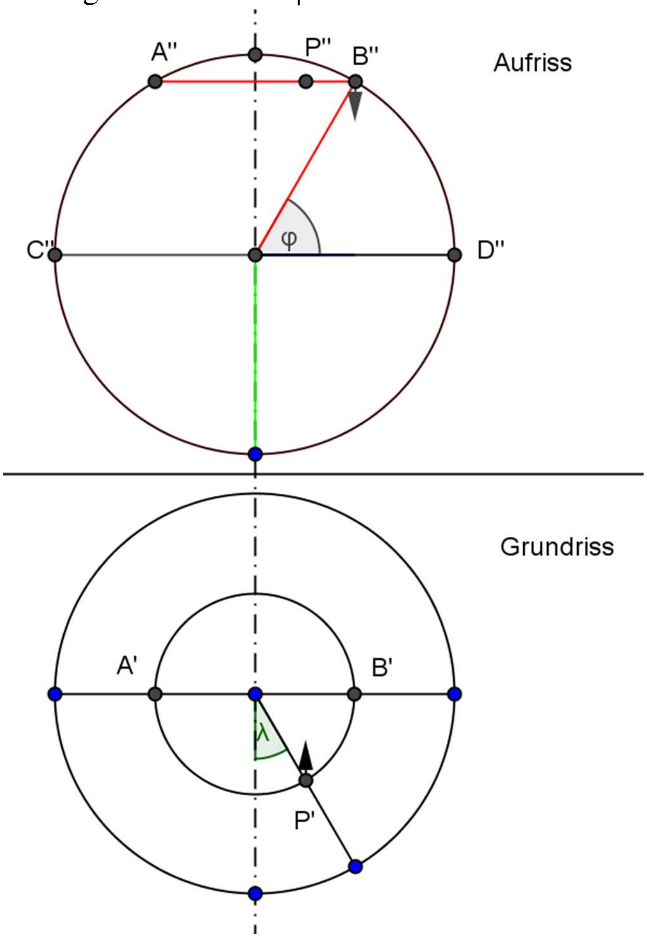


Darstellung eines Punktes P mit geografischer Länge λ und Breite φ in der Zweitafelprojektion/Eintafelprojektion, Längen- und Breitenkreise

Zweitafelsystem

Beispiel:
P: Leningrad (λ= 23.4°E, φ= 59.9 N)

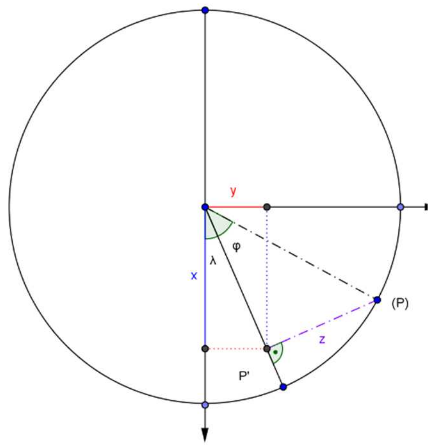
Der Breitenkreis von P mit Radius ρ erscheint im Aufriss projizierend. Der Meridian von P erscheint im Grundriss projizierend.



Darstellung im Eintafelsystem

Beispiel:
P: Athen (λ= 28.7°E, φ= 38.0° N)

Klappt man den Meridian von P (im Grundriss projizierend) in die Aequatorebene um, so kann die geografische Breite von P abgetragen werden (P). Zurückklappen ergibt den Grundriss P‘ von P.



Aus der Skizze ergeben sich die Formeln für die Umrechnung vom geografischen ins kartesische Koordinatensystem.

Gegeben geografische Koordinaten
Gesucht kartesische Koordinaten

$$MP' = R \cdot \cos\varphi = \cos\varphi$$

$$\frac{x}{MP'} = \cos\lambda \quad x = MP' \cdot \cos\lambda = \cos\varphi \cdot \cos\lambda$$

$$\frac{y}{MP'} = \sin\lambda \quad y = MP' \cdot \sin\lambda = \cos\varphi \cdot \sin\lambda$$

$$z = \sin\varphi$$

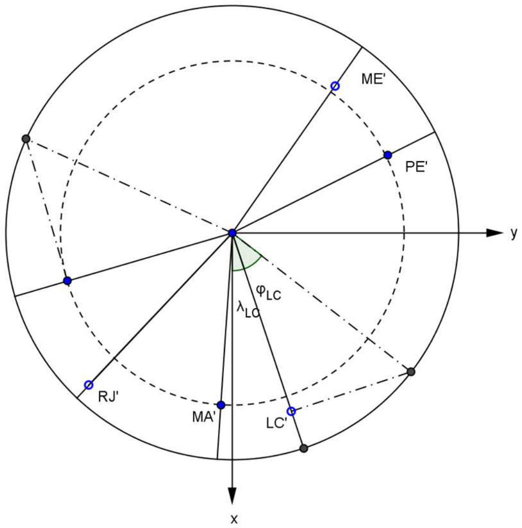
Für den Ortsvektor eines Punktes P mit der geografischen Länge λ und der geografischen Breite φ gilt damit:

(1) $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} \cos\lambda \cdot \cos\varphi \\ \sin\lambda \cdot \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ **kartesische Koordinaten eines Kugelpunktes P(**λ,φ)

Übungsaufgabe:

Stellen Sie die folgenden durch ihre geografischen Koordinaten bestimmten Orte dar (R = 50mm). Beachten Sie, dass die ersten drei Städte fast auf dem gleichen Breitenkreis liegen.

a) Madrid (3.7°W, 40.4°N)
b) New York (73.7°W, 40.7°N)
c) Peking (73.4°E, 39.9°N)
d) Rio de Janeiro (43.3W, 22.9°S)
e) Le Cap (18.5°E, 37.56.8°S)
f) Melbourne (145.0°E, 37.8°S)



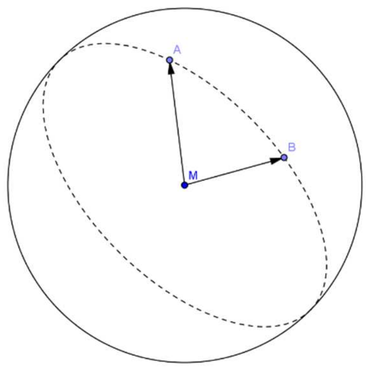
Lösung (Einheit: 50mm)
a)
a) Madrid (38.0, -2.5)

$$x = R \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda \approx 38.0$$
$$y = R \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda \approx -2.5$$
$$(z = R \cdot \sin\varphi \approx 32.4)$$

b) New York (10.6, - 36.4)
c) Peking (-17.1, 34.3)
d) Rio de Janeiro (33.5, -31.6)
e) Le Cap (39.4, 13.1)
f) Melbourne (-32.4, 22.7)

3. Berechnung des kürzesten sphärischen Abstands

Der sphärische Abstand zweier Punkte A und B wird auf dem Grosskreisbogen durch die Punkte A und B gemessen. Er ist also auf der Einheitskugel festgelegt durch den Winkel (im Bogenmass) der von den Ortsvektoren der Punkte A und B eingeschlossen wird.



Gegeben: $A(\lambda_A, \varphi_A)$ und $B(\lambda_B, \varphi_B)$
$\lambda > 0$ nach W bzw. $\lambda < 0$ nach E
$\varphi > 0$ nach N bzw. $\varphi < 0$ nach S

Gesucht: sphärischer Abstand c von A und B

3.1. Rechnerische Lösung:

Mit dem Skalarprodukt erhält man

$$\cos c = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \vec{a}\cdot\vec{b} \text{ wegen } |\vec{a}| = \left|\overrightarrow{MA}\right| = 1 \text{ bzw. } |\vec{b}| = \left|\overrightarrow{MB}\right| = 1$$

wegen (1) mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\lambda_A \cdot \cos\varphi_A \\ \sin\lambda_A \cdot \cos\varphi_A \\ \sin\varphi_A \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{b} = \begin{pmatrix} \cos\lambda_B \cdot \cos\varphi_B \\ \sin\lambda_B \cdot \cos\varphi_B \\ \sin\varphi_B \end{pmatrix}$

womit gilt:

$$\cos c = \cos\lambda_A \cdot \cos\lambda_B \cos\varphi_A \cdot \cos\varphi_B + \sin\lambda_A \cdot \sin\lambda_B \cos\varphi_A \cdot \cos\varphi_B + \sin\varphi_A \cdot \sin\varphi_B$$

Trigonometrische Funktionen sind additionstheoremverdächtig

$$\cos c = \cos\varphi_A \cdot \cos\varphi_B \left(\cos\lambda_A \cdot \cos\lambda_B + \sin\lambda_A \cdot \sin\lambda_B\right) + \sin\varphi_A \cdot \sin\varphi_B$$
$$\cos c = \cos\varphi_A \cdot \cos\varphi_B \cdot \cos(\lambda_A - \lambda_B) + \sin\varphi_A \cdot \sin\varphi_B$$

(2) $\cos c = \cos\varphi_A \cdot \cos\varphi_B \cdot \cos(\Delta\lambda) + \sin\varphi_A \cdot \sin\varphi_B$ **sphärischer Abstand von A und B**

Beispiele (Kuerzester_Abstand.xls):

Zofingen (7°56'E, 47°18'N)
London (0°, 51°32'N)

				Bogenmass				Bogenmass
A	Länge λ		-7.93333	0.13846	**B**	λ	0.00000	0.00000
Zofingen	Breite φ		47.30000	0.82554	**London**	φ	51.53333	0.89943
kart. Koord.	**A**	x		0.67167	**kart. Koord.**	**B**		0.62206
	Zofingen	y		0.09360		**London**		0.00000
		z		0.73491				0.78297
cos c				0.99323	Erdradius	r		6371
c		sphärischer Abstand		**0.11639**				**741.5**
		euklid.Abstand		**0.11632**				**741.1**

Zürich (8.6°E, 47.4°N)
Rio de Janeiro   (43.4°W, 22.9°S)

				Bogenmass				Bogenmass
A	Länge		-8.6	0.15010	**B**	λ	43.4	0.75747
Zürich	Breite		47.4	0.82729	**Rio**	φ	-22.9	-0.39968
Kloten					**de Janeiro**			
kart.					**kart.**			
Koord.	**A**	x		0.66927	**Koord.**	**B**		0.66931
	Zürich	y		0.10122		**Rio**		0.63293
		z		0.73610				-0.38912
cos c				0.09745	Erdradius	r		6371
c		sphärischer A.		**1.47319**				**9385.7**
		euklid. A.		**1.34354**				**8559.7**

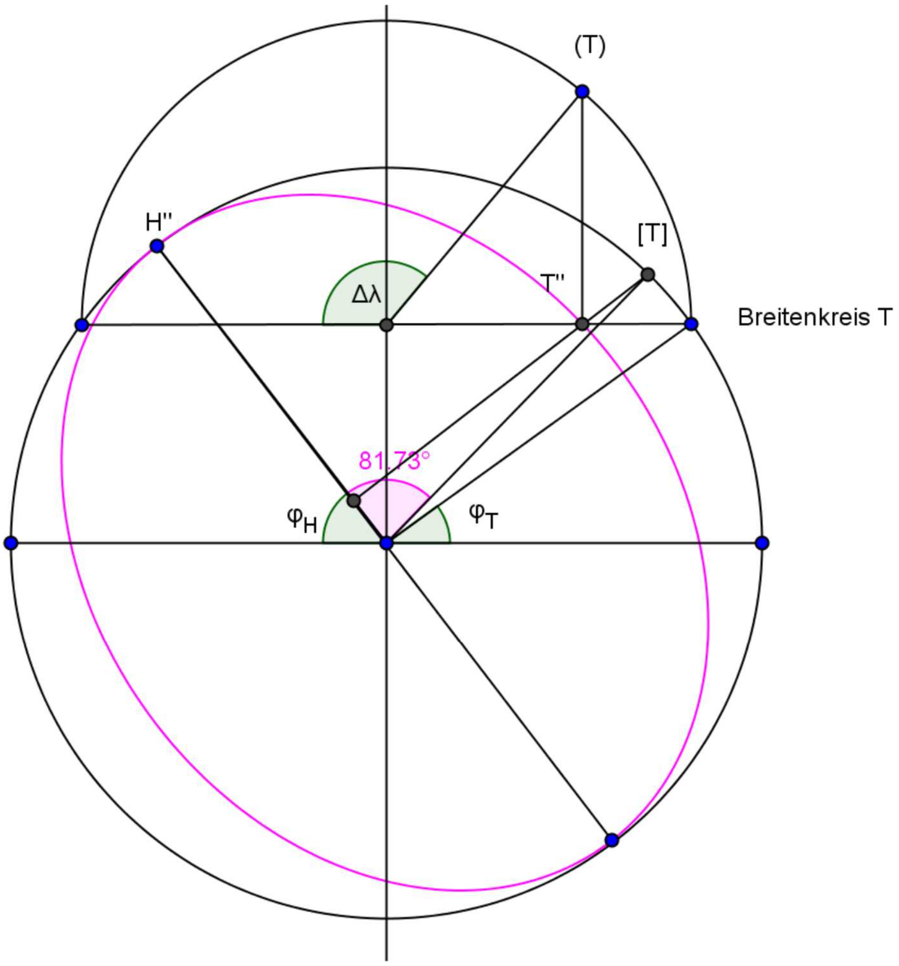
Hannover (9.8°E, 52.4°N)
Tokio (140.0°E, 35.8°N)

				Bogenmass				Bogenmass
A	Länge		-9.8	0.17104	**B**	λ	-140.0	-2.44346
Hannover	Breite		52.4	0.91455	**Tokio**	φ	35.8	0.62483
kart.					**kart.**			
Koord.	**A**	x		0.60124	**Koord.**	**B**		-0.62131
	Hannover	y		0.10385		**Tokio**		0.52134
		z		0.79229				0.58496
cos c				0.14404	Erdradius	r		6371
c		sphärischer A.		**1.42625**				**9086.7**
		euklid. A.		**1.30840**				**8335.8**

3.2 Konstruktive Lösung

Hannover (9.8°E, 52.4°N)
Tokio (140.0°E, 35.8°N)

$\Delta\lambda = 130.2°$

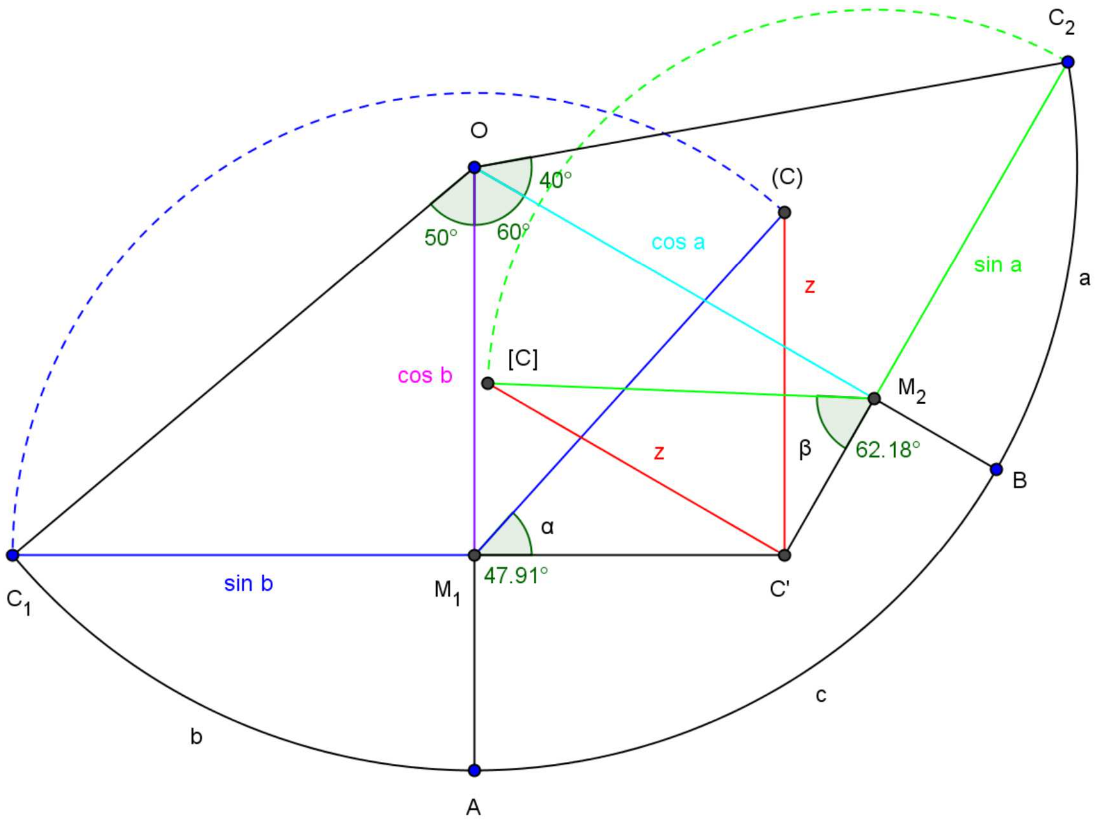


Konstruktion im Aufriss

Die Disposition wird durch Drehung der Kugel so gewählt, dass einer der beiden Orte auf den Randkreis der Kugel zu liegen kommt.
- H eintragen
- Der Breitenkreis (im Aufriss projizierend) wird in die Zeichenebene umgeklappt (T)
- $\Delta\lambda$ abtragen $\rightarrow$ (T) $\rightarrow$ zurückklappen T‘‘
- Der Grosskreis durch H und T wird in die Zeichenebene umgeklappt $\rightarrow$ [T]
- Der gesuchte Abstand ist gleich der Länge des Bogens H‘‘[T].
- Die kleine Achse der Ellipse kann nach de la Hire oder mit der
  Papierstreifenkonstruktion gefunden werden.

4. Sätze zur Berechnung von Kugeldreiecken

Ein sphärisches Dreieck besteht aus 3 Kugelpunkten A,B,C, die durch Grosskreisbogen verbunden sind.



Tip:

Zur Veranschaulichung kann ein einfaches Modell eines Kugeldreiecks dienen. Dazu schneidet man die aus drei Sektoren bestehende Figur aus starkem Papier oder leichtem Karton aus. Im Beispiel wurde a = 40°, b = 50°, c = 60° gewählt. Faltet man die Figur längs der Radien OA bzw. OB, so treffen C_1 bzw. C_2 nach einer Drehbewegung um die Radien OA bzw. OB im Punkt C aufeinander.

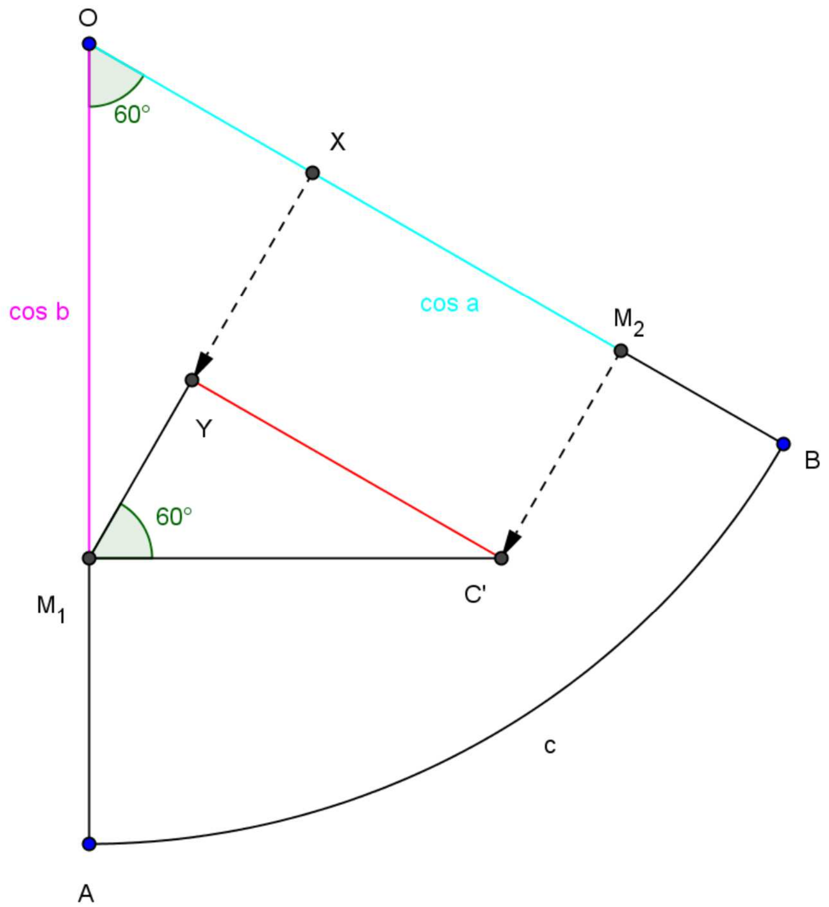
Bei der Konstruktion im Grundriss wird c in der Äquatorebene gewählt. Betrachtet man beide Drehbewegungen im Grundriss, so ergibt sich C' als Schnittpunkt der Geraden C_1M_1 und C_2M_2. Klappt man die beiden Drehkreise in die Äquatorebene um, so erhält man die Punkte (C) bzw. [C]
Der Sinussatz ergibt sich, indem man die rot dargestellte z-Koordinate von C auf zwei verschiedene Arten berechnet.

Dreieck $M_2C'[C]$ ⸬ $\sin\beta = \frac{z}{\overline{\overline{C_2M_2}}} = \frac{z}{\sin a} \quad z = \sin\beta\cdot\sin a$

Dreieck $M_1C'(C)$ ⸬ $\sin\alpha = \frac{z}{\overline{\overline{C_1M_1}}} = \frac{z}{\sin b} \quad z = \sin\alpha\cdot\sin b$

(3) $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ **Sinussatz**

Der **Seitencosinussatz** ergibt sich, indem man die Strecke $OM_2 = \cos a$ aus zwei Teilstrecken zusammensetzt. Dazu betrachtet man in der Abbildung das Viereck $OM_1C'M_2$, ergänzt durch die Punkte X und Y



1. $\overline{OM_2} = \overline{OX} + \overline{XM_2} = \cos a$

2. Dreieck OM_1X: $\cos c = \dfrac{\overline{OX}}{\overline{OM_1}}$ $\quad \overline{OX} = \overline{OM_1} \cdot \cos c = \cos b \cdot \cos c$

3. Man betrachtet in der Figur zum Sinussatz das Dreieck M_1C' (C):

$$\cos\alpha = \frac{\overline{M_1C'}}{\overline{M_1(C)}} = \frac{\overline{M_1C'}}{\sin b} \qquad \overline{M_1C'} = \sin b \cdot \cos\alpha$$

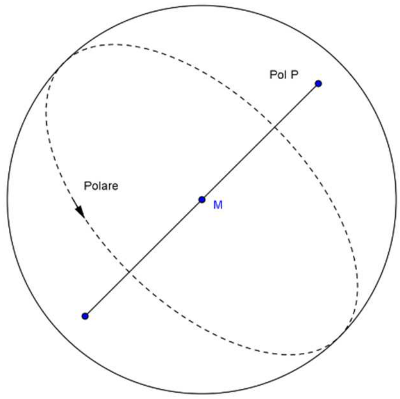
4. Dreieck $M_1C'Y$: $\sin c = \dfrac{\overline{YC'}}{\overline{M_1C'}} = \dfrac{\overline{XM_2}}{\overline{M_1C'}}$

$$\overline{XM_2} = \overline{M_1C'} \cdot \sin c = \sin b \cdot \cos\alpha \cdot \sin c = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha \cdot$$

2. und 4. eingesetzt in 1. führt somit auf

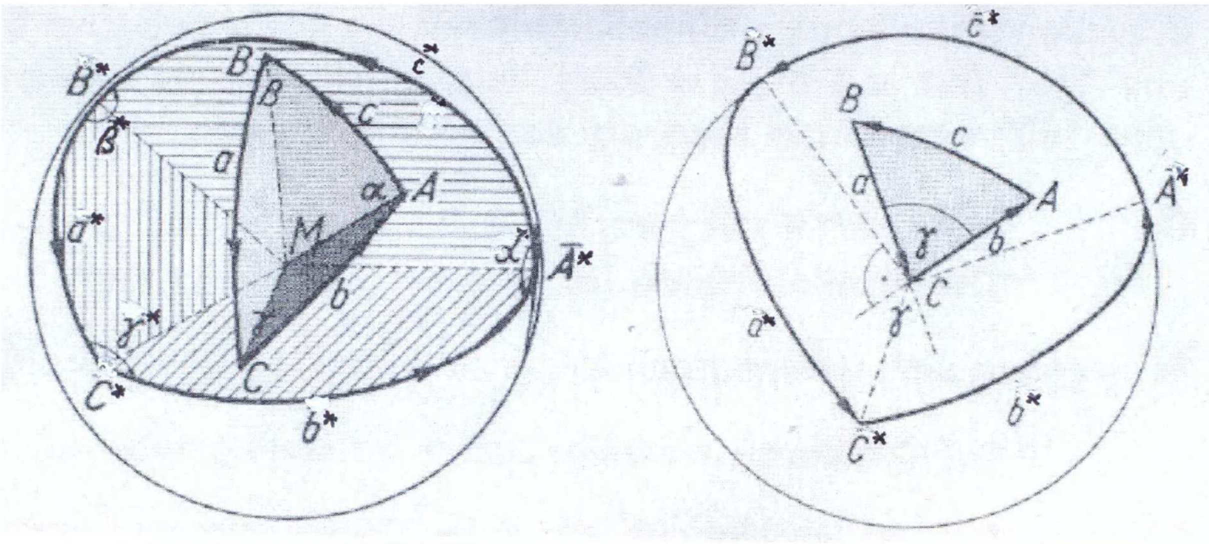
(4) $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$ **Seitencosinussatz**

Der **Winkelcosinussatz** ergibt sich auf einfache Weise aus dem Seitencosinussatz, wenn man die Begriffe Pol und Polare einführt. Unter den Polen eines Grosskreises versteht man die beiden Schnittpunkte der Kreisachse mit der Kugel. Eindeutigkeit kann hergestellt werden, indem man den Grosskreis mit einem Durchlaufsinn versieht. Der zum gerichteten Grosskreis (der sogenannten Polaren) gehörige Pol soll dann stets zur Linken liegen, wenn man sich in der Durchlaufrichtung bewegt. Jedem gerichteten Grosskreis d.h. jeder Polaren ist dann (sogar umkehrbar) eindeutig ein Pol zugeordnet.
Dem von West nach Ost orientierten Äquator entspricht der Nordpol, der umgekehrten Orientierung der Südpol.



Kugeldreiecke

Drei Kugelpunkte, die nicht auf einem Grosskreis liegen legen ein Kugeldreieck mit den Seiten c = AB, a = BC, b = CA fest. Im Folgenden betrachten wir Dreiecke ohne überstumpfe Winkel. Seine Winkel sind die Winkel zwischen den Grosskreisebenen. Die Pole der drei Seiten a, b, c bilden ein Dreieck A*B*C* mit den Seiten a*, b* und c*, wo etwa B* senkrecht zur Ebene (MA, MC) liegt. Dieses Dreieck heisst Polardreieck des Dreiecks ABC.



Die zwischen einem Kugeldreieck und seinem Polardreieck bestehenden Beziehungen zu erkennen, dreht man das Dreieck ABC so, dass die Ecke C im Grundriss mit dem Mittelpunkt M des Umkreises zusammenfällt. Damit erscheinen die Grosskreisebenen der Seiten a und b projizierend. Ihre Pole liegen also auf dem Äquator (senkrecht zu BC = a bzw. CA = b). In dieser Darstellung ist zu erkennen, dass der Bogen c* und der Winkel γ (Bogen) die Gesamtlänge π (180°) ergeben. Mit entsprechenden Überlegungen gilt also für die Seiten und Winkel zweier polarer Dreiecke:

(5) $a^*+\alpha = b^*+\beta = c^*+\gamma = \pi$ **und entsprechend** $a+\alpha^* = b+\beta^* = c+\gamma^* = \pi$

da ein Dreieck das Polardreiecks seines Polardreiecks ist.

Ist also ein Satz über ein Dreieck bewiesen, dann gilt ein entsprechender polarer Satz. Im Polardreieck A*B*C* gilt der Seitencosinussatz ebenfalls:

(4) $\cos a^* = \cos b^* \cdot \cos c^* + \sin b^* \cdot \sin c^* \cdot \cos \alpha^*$ **Seitencosinussatz**

Wegen (5) gilt damit

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta) \cdot \sin(\pi - \gamma) \cdot \cos(\pi - a)$$

$$-\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma - \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a$$

und damit schliesslich

(6) $\cos\alpha = -\cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a$ **Winkelcosinussatz**

Ergänzungen (ohne Beweis)

Die Summe der drei Seiten ist stets kleiner als 2π: $a + b + c < 2\pi$

Die **Winkelsumme** liegt zwischen π und 3π:

$0 < \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi < 2\pi$ oder

$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ **Winkelsumme**

wobei der Überschuss ε über π sphärischer Exzess eines Kugeldreiecks heisst.

Für den **Flächeninhalt** eines Kugeldreiecks gilt:

$I = \dfrac{\pi \cdot R^2}{180°} \cdot \varepsilon°$ **Flächeninhalt eines Dreiecks**

d.h. Dreiecke mit gleichen Winkeln haben auch gleichen Flächeninhalt. Im Gegensatz zur Ebene ist ein Kugeldreieck durch seine drei Winkel eindeutig bestimmt.
Rechtwinklige Kugeldreiecke und Nepersche Regeln.

Für rechtwinklige Dreiecke ($\gamma = \frac{1}{2} \cdot \pi$) ergeben sich Vereinfachungen:

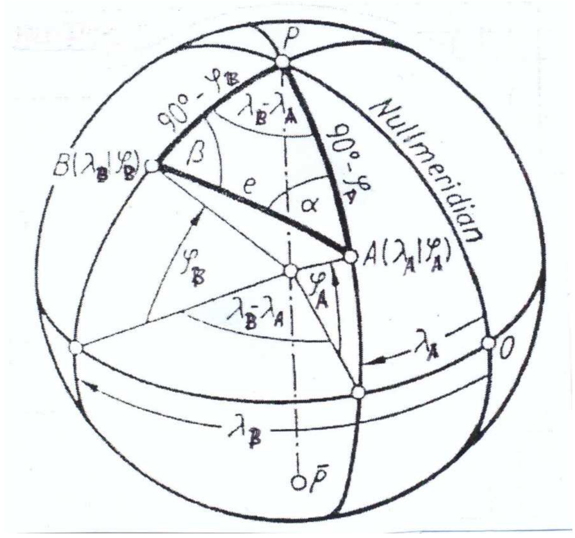
z.B. $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma$ **Seitencosinussatz** $\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \pi\right) = 0$

$\cos c = \cos a \cdot \cos b$ **Sphärischer Pythagoras**

5. Anwendung auf die Navigation

5.1 Sphärischer Abstand

Die Berechnungen werden zurückgeführt auf die Berechnung eines sphärischen Dreiecks festgelegt durch die Punkte $A(\lambda_A,\varphi_A)$ und $B(\lambda_B,\varphi_B)$ und den Nordpol P (bzw. Südpol).



Im sphärischen Dreieck sind zwei Seiten $a=\frac{\pi}{2}-\varphi_B$ und $b=\frac{\pi}{2}-\varphi_A$ sowie der Zwischenwinkel $\Delta\lambda=\lambda_B-\lambda_A$ gegeben.

Nach dem Seitencosinussatz gilt:

$$\cos e=\cos c=\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\varphi_B\right)\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\varphi_A\right)+\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\varphi_B\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\varphi_A\right)\cdot\cos(\Delta\lambda)$$

Daraus ergibt sich wegen $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi$
die bereits früher hergeleitete Formel (2)

(2) $\cos c=\cos\varphi_A\cdot\cos\varphi_B\cdot\cos(\Delta\lambda)+\sin\varphi_A\cdot\sin\varphi_B$ **sphärischer Abstand von A und B**

5.2 Kurswinkel

Kurswinkel können auf verschiedene Arten bestimmt werden.

a)
Lösung mit Sinussatz Im Poldreieck PAB :

$$\frac{\sin e}{\sin(\Delta\lambda)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_B\right)}{\sin\alpha}\qquad \sin\alpha=\frac{\sin(\Delta\lambda)\cdot\cos\varphi_B}{\sin e}\qquad \text{Kurswinkel in A}$$

entsprechend

$$\frac{\sin e}{\sin(\Delta\lambda)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_A\right)}{\sin\beta}\qquad \sin\beta=\frac{\sin(\Delta\lambda)\cdot\cos\varphi_A}{\sin e}\qquad \text{Kurswinkel in B}$$

Nachteil:
Ein Sinuswert bestimmt keinen eindeutigen Winkel, denn es gilt z.B. sin 30° = sin 150°. Aus diesem Grund ist eine Bestimmung des Kurswinkels mit dem Sinussatz problematisch.

b)
Lösung mit dem Seitencosinussatz:

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha$$

$$\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha=\cos a-\cos b\cdot\cos c$$

$$\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_B\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_A\right)\cdot\cos e}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_A\right)\cdot\sin e}=\frac{\sin\varphi_B-\sin\varphi_A\cdot\cos e}{\cos\varphi_A\cdot\sin e}$$

c)
Lösung nach dem sogenannten Cotangenssatz (ohne Beweis)

$$\cot\alpha = \frac{\cos\varphi_A \cdot \tan\varphi_B - \sin\varphi_A \cdot \cos(\Delta\lambda)}{\sin(\Delta\lambda)}$$

Für Entfernungen auf der Erde verwendet man als Einheit die Länge eines Grosskreises durch die Pole: 40008 km, damit entsprechen 1° 111.1 km, bzw. 1´ 1.852 km, genannt eine Seemeile. Geschwindigkeiten werden in der Navigation in Knoten angegeben.
1 Knoten = 1 Seemeile pro Stunde 1 kn = 1 sm/h.
Die gesuchte Entfernung beträgt also 4910 sm

Beispiel
H (Hannover) (9.8°E, 52.4°N)
T (Tokio) (140.0°E, 35.8°N)

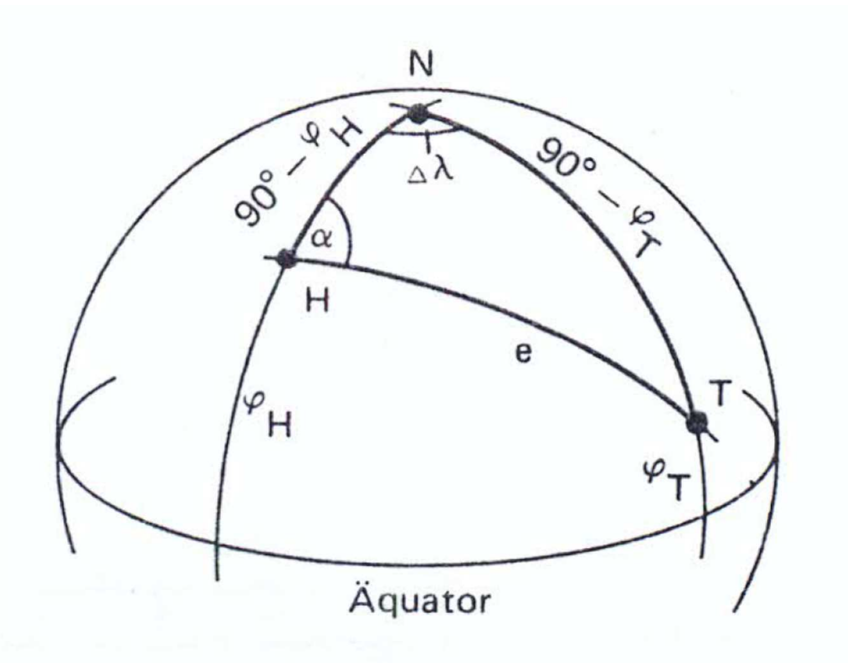
Kurswinkel in Hannover

Seitencosinussatz:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$$

nach cos α aufgelöst

$$\cos\alpha = \frac{\sin\varphi_T - \sin\varphi_H \cdot \cos c}{\cos\varphi_H \cdot \sin c}$$



(kuerzester_Abstand.xls)

			Bogenmass				Bogenmass
A	Länge	-9.8	-0.17104	**B**	Länge	-140.0	-2.44346
Hannover	Breite	52.4	0.91455	**Tokio**	Breite	35.8	0.62483

kart. Koord.	**A**	x	0.60124	**kart. Koord.**	**B**	-0.62131
	Hannover	y	0.10385		**Tokio**	0.52134
		z	0.79229			0.58496
cos c			0.14404	Erdradius	r	6371
c		sphärischer A.	**1.42625**			**9086.7**
		euklid. A.	**1.30840**			**8335.8**

Kurswinkel in Hannover

nach a) mit Sinussatz

$\Delta\lambda$	Breite von Tokio	sphärischer Abstand
2.27242	0.62483	1.42625

	sin α	α (rad)
Kurswinkel	0.626	0.676433138

α°
38.8

nach b) mit Seitencosinussatz

Breite von Hannover	Breite von Tokio	sphärischer Abstand
0.91455	0.62483	1.42625

	cos α	α (rad)
Kurswinkel	0.78	0.676433138

α°
38.8

nach c) mit Cotangenssatz

Breite von Hannover	Breite von Tokio	$\Delta\lambda$
0.91455	0.62483	2.27242

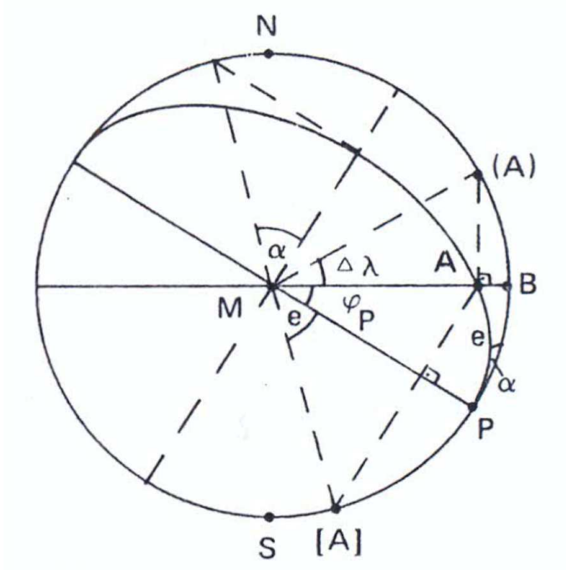
cot α	tan α
1.246	0.802778966
	α (rad)
	0.676433138

α°
38.8

5.3 Schnittpunkt einer Route mit dem Äquator, einem Meridian oder einem Breitenkreis

Aufgabe:
Wo und wann überquert ein Schiff den Äquator, wenn es in Perth (32.2°S, 116.1°E) (Australien) unter einem Kurswinkel N 46° W startet und auf einem Grosskreis mit einer mittleren Geschwindigkeit von 18 Knoten fährt.

Die Aufgabe kann konstruktiv gelöst werden. Legt man den Meridian von Perth in die Zeichenebene, so kann die Ellipse des Grosskreises konstruiert werden. Die kleine Achse ist durch den Kurswinkel α festgelegt. Der Schnittpunkt A des Grosskreises mit dem Aequator ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden MB mit der Ellipse. Klappt man den Äquator um MP in die Zeichenebene, so ergibt sich [A] und durch Zurückklappen der gesuchte Punkt A. Die geografische Länge λ_A wird erhalten, indem man die Äquatorebene in die Zeichenebene umklappt und den Winkel $\Delta\lambda = \angle$ AM(A) misst. $\lambda_A = \lambda_P - \Delta\lambda$ ist damit bestimmt.



Rechnerische Lösung

Statt des Kugeldreiecks NAP kann auch das bei B rechtwinklige Dreieck ABP betrachtet werden.
Der Winkelcosinussatz ergibt in diesem Dreieck

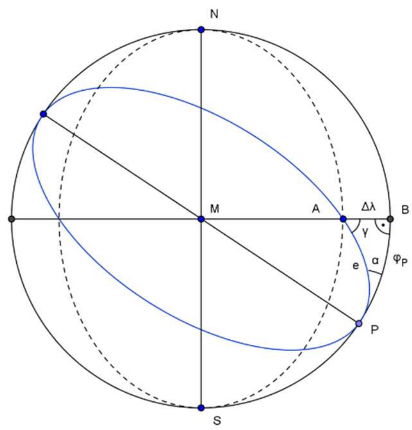
$$\cos\gamma = -\cos 90° \cdot \cos\alpha + \sin 90° \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi_P$$

oder

$\cos\gamma = \sin\alpha \cdot \cos\varphi_P$ und daraus $\gamma \approx 52.5°$.

Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{\sin\Delta\lambda}{\sin\alpha} = \frac{\sin\varphi_P}{\sin\gamma} \text{ oder } \sin\Delta\lambda = \sin\alpha \cdot \frac{\sin\varphi_P}{\sin\gamma}$$



mit der Lösung $\Delta\lambda \approx 28.9°$

Die geografische Länge von A beträgt damit $\lambda_A = \lambda_P - \Delta\lambda \approx 116.1° - 28.9° \approx 87.2°$.

Ebenfalls mit dem Sinussatz ergibt sich daraus die gesuchte Entfernung zu

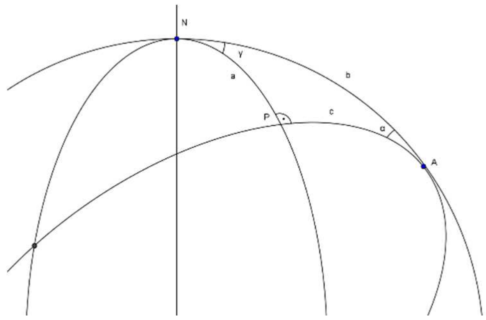
$$\frac{\sin e}{\sin 90°} = \frac{\sin\Delta\lambda}{\sin\alpha} \text{ oder } \sin e = \frac{\sin\Delta\lambda}{\sin\alpha}$$ mit der Lösung $e \approx 42.2°$.

42.2° entspricht etwa 2532 sm. Bei einer mittleren Geschwindigkeit von 18 Knoten wird diese Strecke etwa in 140 h und 40 min zurückgelegt. Das Schiff überquert also den Äquator 5 d und 20 h 40 min nach dem Start bei 87.2° östlicher Länge. Biegalke ermittelt die gesuchten

Grössen direkt zu $\tan \Delta\lambda = \sin|\varphi_P| \cdot \cot \alpha$ bzw. $\cot e = \dfrac{\cos \alpha}{\tan|\varphi_P|}$.

5.4 Nördlichster oder südlichster Punkt einer Route

Die geografischen Koordinaten des nördlichsten Punktes können im rechtwinkligen Dreieck NPA bestimmt werden.



Bestimmung der Breite:
Sinussatz im Dreieck NPA:
$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}$ und daraus

$\sin a = \sin \alpha \cdot \frac{\sin b}{\sin \beta} = \sin \alpha \cdot \sin b$ wobei a ein spitzer Winkel ist und sin β = 1.

Bestimmung der Länge

Zunächst wird c berechnet:
Cosinussatz im rechtwinkligen Dreieck NPA:
$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta = \cos a \cdot \cos c$ wegen cos β = 0 woraus folgt:

$$\cos c = \frac{\cos b}{\cos a}$$

Der gesuchte Winkel ergibt sich nun mit dem Sinussatz:

$\frac{\sin \gamma}{\sin c} = \frac{\sin b}{\sin \beta}$ $\qquad$ $\sin \gamma = \sin c \cdot \frac{\sin b}{\sin \beta} = \sin c \cdot \sin b$, da sin β= 1

Die Aufgabe kann auch in der Eintafelprojektion konstruktiv gelöst werden. Im nördlichsten (bzw. südlichsten) Punkt P ist die Tangente an die Bahnellipse zum Äquator parallel.

Eine rechnerische Lösungsvariante ergibt sich vektoriell:

Stellt man die Grosskreisebene ε der Ellipsenbahn projizierend dar, so erkennt man, dass die gesuchte Breite des nördlichsten Punkts N gerade gleich dem nicht stumpfen Zwischenwinkel der Bahnebene ε und der Äquatorebene π ist.

Die Äquatorebene hat den Normalenvektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Ebene der Bahn ist durch den Kugelmittelpunkt und die Punkte A und B bestimmt.
Damit ist $\vec{n} = \overrightarrow{r_A} \times \overrightarrow{r_B}$ ein Normalenvektor von μ und die Breite ist bestimmt durch

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{e}|}{|\vec{n}|}$$

Für die Bestimmung der Länge des nördlichsten Punkts N sucht man zunächst einen Normalenvektor $\vec{m}$ der Meridianebene μ von N, z.B. $\vec{m} = \vec{p} \times \vec{e}$ wo $\vec{p}$ den Ortsvektor zum nördlichsten Punkt bezeichnet.

$$\vec{m} = \vec{p} \times \vec{e} = \begin{pmatrix} \cos\lambda \cdot \cos\varphi \\ \sin\lambda \cdot \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\lambda \cdot \cos\varphi \\ -\cos\lambda \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da Meridian- und Bahnebene aufeinander senkrecht stehen muss gelten:
$\vec{m} \cdot \vec{n} = n_1 \cdot \sin\lambda \cdot \cos\varphi - n_2 \cdot \cos\lambda \cdot \cos\varphi = 0$
oder
$n_1 \cdot \sin\lambda \cdot \cos\varphi = n_2 \cdot \cos\lambda \cdot \cos\varphi$ nach Division durch (cos φ·cos λ)
$n_1 \cdot \tan\lambda = n_2$ und schliesslich

$$\tan\lambda = \frac{n_2}{n_1}$$

Beispiel:
Ein Flugzeug fliegt auf einem Grosskreis von Frankfurt (8.7°E, 50.1°N) nach Vancouver(123.1W, 49.3°N). Wo befindet sich der nördlichste Punkt des Flugwegs?

				Bogenmass				Bogenmass	
A	Länge		-8.70	-0.15	**B**	Länge	123.10	2.15	
Frankfurt	Breite		50.10	0.87	**Vancouver**	Breite	49.30	0.86	
kart. Koord.	**A**	x		0.63	**kart. Koord.**	**B**			
	Frankfu	y		-0.10		**Vancouver**			
		z		0.77					
cos c				0.30	Erdradius	r	6371.00	km	
c		sphärischer A.		**1.26**	72.37		**8047.56**	km	
		euklid. A.		**1.18**			**7523.12**	km	
Zum Vergleich		Länge des Weges auf dem Breitenkreis							

Radius des gemeinsamen Breitenkreises von Frankfurt und Vancouver

$\boxed{\rho = \cos\varphi \approx}$ 0.65

$\Delta\lambda$

2.30	Erdradi	r	6371.00			
Länge des Bogens auf dem Breitenkreis			1.49	**9498.52**	km	ca 18% länge
Länge des sphärischen Abstands			1.26	**8047.56**	km	

Kurswinkel in Frankfurt
nach a) mit Sinussatz

$\Delta\lambda$	Breite von Vancouver	spärischer Abstand	
2.30	0.86	1.26	72.37

sin α	α (rad)		α°
0.51	0.54	Kurswinkel	**30.67**

Der Kurswinkel beim Start in Frankfurt beträgt N 30.7 W, also weit nördlicher als NW.

nördlichster Punkt

Lösung mit sphärischer Trigonometrie

sin α	sin b	sin a		a rad	a°	Breite nördl. P.	
0.51	0.64	0.33	**0.33**	19.10	70.90		
b_nP	0.33	cos	0.94		c	c°	
a_F	0.70	cos	0.77	0.81	0.62	35.72	
sin γ		sin c	0.58				
		sin a F	0.64	0.91	1.14	65.54	

nördl. Punkt	56.84	Länge
	70.90	Breite

Lösung vektoriell

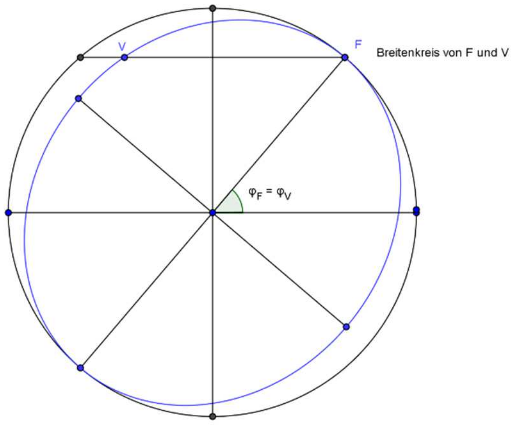
kart. Koord.				kart. Koord.		
A	x	0.63		B	x	-0.36
Frankfurt	y	-0.10		Vancouver	y	0.55
	z	0.77			z	0.76
	x	0.63			x	-0.36
	y	-0.10			y	0.55
	$\boxed{\vec{n}}$			$\boxed{\vec{e}}$		
	-0.49	-0.49	0.24	0		
	-0.75	-0.75	0.57	0		
	0.31	0.31	0.10	1		
		$\boxed{\lvert\vec{n}\rvert}$	0.95	$\boxed{\lvert\vec{n}\cdot\vec{e}\rvert}$		0.31
cos φ	0.33					
φ	1.24	70.90				
tan λ	1.53	0.99	56.84			

Koordinaten des nördlichsten Punkts

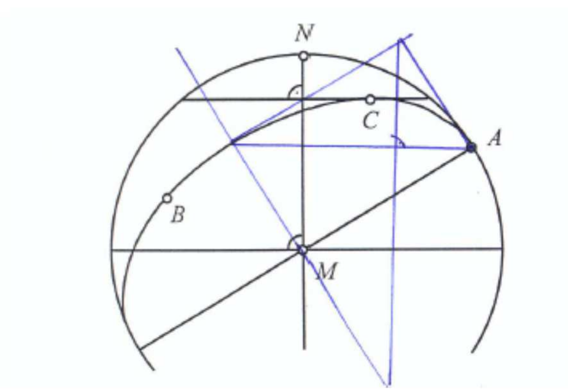
P	56.84	W
	70.90	N

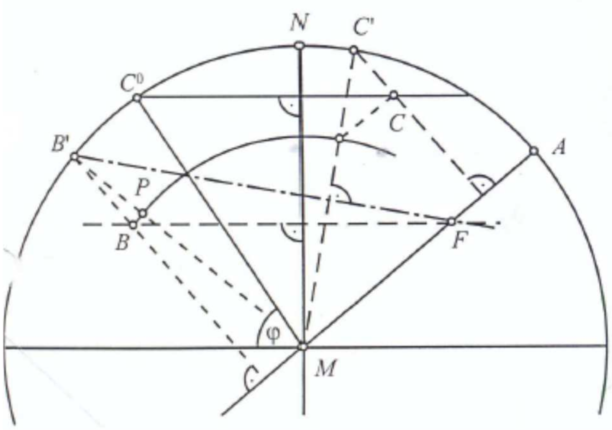
Der nördlichste Punkt der Flugroute auf dem Grosskreis liegt in 70.9° N. Dies entspricht der Breite des nördlichsten Punkts von Norwegen, dem Nordkap, etwa 40 km nördlicher als der Polarkreis, was nicht unbedingt zu erwarten ist.

Bemerkung:
Tatsächlich verlaufen Non-Stop-Linienflüge auf bestimmten Flugstrassen, die sich nicht an die Grosskreise halten.



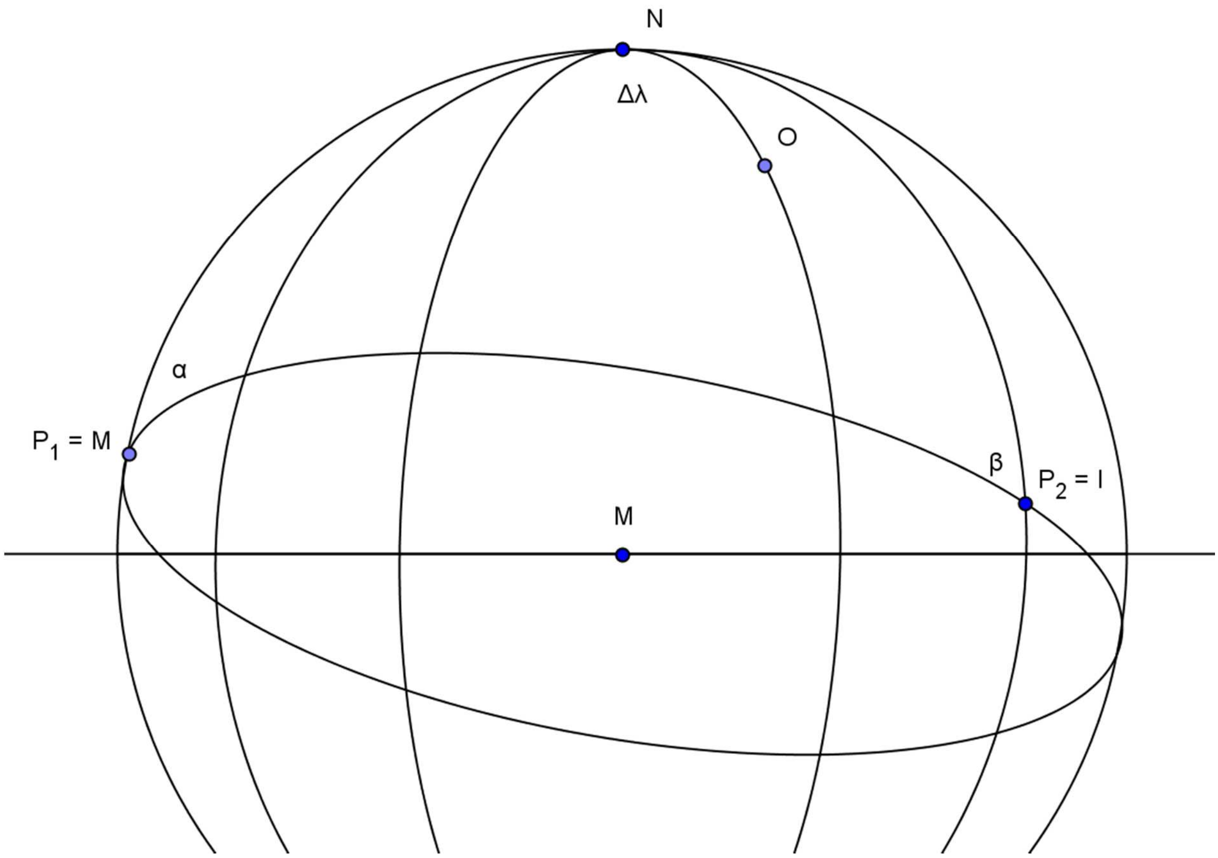
Die Aufgabe kann auch konstruktiv gelöst werden. In der Abbildung ist zu erkennen, dass am nördlichsten Punkt die Ellipsentangente parallel zum Äquator ist. Im folgenden Beispiel mit einer andern Disposition ist die Konstruktion durchgeführt.





Zunächst kann mit dem Punkt B die kleine Achse der Ellipse konstruiert werden. Die Breitenkreis schneidet die grosse Achse der Ellipse im Punkt F. Sie geht bei der normalen Affinität in die Gerade B'F über. Gesucht ist nun die zu B'F parallele Kreistangente, die den Grosskreis in C' berührt. Ihr Urbild C kann etwa wie bei B mit der Zweikreisekonstruktion gefunden werden.

5.5. Fremdpeilung



Die Berechnung erfolgt in drei Schritten:

1. Schritt:
Im Poldreieck P_1P_2N sind mit den Koordinaten der Peilstationen P_1 und P_2 zwei Seiten und der Zwischenwinkel gegeben. Damit können die fehlenden Seiten und Winkel mit dem Seitencosinussatz berechnet werden.
2. Schritt
Im (in der Skizze nicht dargestellten Dreieck) P_1P_2O ist die Seite P_1P_2 bekannt. Die anliegenden Winkel α_2 bei P_1 und β_2 bei P_2 können mit den Peilwinkeln bestimmt werden:
$\alpha_2 = \angle P_2P_1O = \angle P_2P_1N - \alpha_1$
$\beta_2 = \angle OP_2P_1 = \angle P_2P_1N - (360° - \alpha_2)$
Der Winkel $\gamma = \angle P_1OP_2$ in O kann mit dem Winkelcosinussatz und anschliessend die Seite P_1O mit dem Sinussatz bestimmt werden.
3. Schritt:
Im Dreieck P_1ON sind die Seiten P_1O, P_1N und der Peilwinkel $\alpha_1 = \angle P_1OP_2$ bekannt. Die Seite ON = $90° - \varphi_O$ kann nun mit dem Seitencosinusatz und der Winkel $\angle P_1NO = \lambda - \lambda_O$ mit dem Sinussatz bestimmt werden.

Bemerkung:
Bei diesem Rechengang wird angenommen, dass O wie im folgenden Beispiel innerhalb des Dreiecks P_1P_2N liegt.

Beispiel:

		Länge	Breite	Peilwinkel
P_1				α_I
München M	°	11.8	48.3	108.1
	rad	0.21	0.84	1.89
P_2	°	28.90	40.90	310.10
Istanbul I	rad	0.50	0.71	5.41

1. Schritt: Berechnung des Dreiecks P_1P_2O bzw. MIO

c Seitencosinussatz

a	b	$\Delta\lambda = \lambda_I - \lambda_M$		
41.7	49.1	17.1		
0.73	0.86	0.30		
cos a	cos b	sin a	sin b	cos $\Delta\lambda$
0.75	0.65	0.67	0.76	0.96

cos c	c rad	c°
0.97	0.25	**14.20**

α mit Seitencosinusssatz

cos b	cos c	cos a	sin c	sin a
0.65	0.97	0.75	0.25	0.67

cos α	α rad	α°
-0.42	2.01	**115.04**

β mit Seitencosinusssatz

cos a	cos c	cos b	sin c	sin b
0.75	0.97	0.65	0.25	0.76

cos β	β rad	β°
0.60	0.92	**52.88**

2. Schritt Berechnungen im Dreieck MIO

	München	Istanbul	
	Winkel in P1 =	Winkel in P2	
	$\boxed{\alpha_2 = \alpha - \alpha_1}$	$\boxed{\beta_2 = \beta - (360° - \alpha_2)}$	c
rad	0.12	0.05	0.25
°	6.94	2.98	14.20

γ Winkel in O mit Winkelcosinussatz

cos α_2	cos β_2	sin α_2	sin β_2	cos c
0.99	1.00	0.12	0.05	0.97

cos γ	γ rad	γ°
-0.99	2.97	**170.14**

Berechnung von P_1O mit dem Sinussatz

	c	γ	β_2
rad	0.25	2.97	0.05
°	14.20	170.14	2.98
	sin c	sin γ	sin β_2
	0.25	0.17	0.05

sin(P_1O)	P_1O rad	P_1O °
0.074	0.074515124	**4.27**

3. Schritt Berechnungen im Dreieck P_1ON = MON

Berechnung von NO mit dem Seitencosinussatz

	a	P_1O	α_1		
rad	0.73	0.07	1.89		
°	41.70	4.27	108.10		
	cos a	cos(P_1O)	sin b	sin P_1O	cos α_1
	0.75	1.00	0.95	0.07	-0.31
		cos(NO)	NO rad	NO °	
		0.72	0.76	**43.73**	

geograph. Breite von O $\varphi_O =$ **46.27 N**

Berechnung der geograf. Länge von O mit dem Sinussatz

	NO	P_1O	α_1
rad	0.76	0.07	1.89
°	43.73	4.27	108.10
	sin (NO)	sin (P_1O)	sin α_2
	0.69	0.07444619	0.950515732

sin $\Delta\lambda$	$\Delta\lambda$	$\Delta\lambda$
0.10236337	0.10	**5.88**

geograph. Länge von O $\lambda_O =$ **17.68 E**

Das Flugzeug hat die Position (17.7 E, 46.3 N)

5.6 Übungsaufgaben

Zielort bei bekannter Distanz und vorgegebenem Kurswinkel
Schnittpunkt mit einem Meridian, Breitenkreis
Erdbebenwellen

Weitere Fragen

6. Orthodrome. Loxodrome, Kartenentwürfe

Da sich auf der kürzesten Verbindung (Geodätische auch Orthodrome) der Kurs ständig ändert, unterteilt man sie in der Praxis durch Zwischenpunkte und verbindet diese durch Wege, auf denen der Kurs gleich bleibt. Solche Kurven konstanten Kurses heissen Loxodromen. Diese schneiden die Meridiane unter gleichen Winkeln.

7. Euklidische und nichteuklidische Geometrie