

5. geordnete Stichproben, Wörter, Variationen

Einführendes Beispiel zur Fragestellung:

Mit den $n = 5$ Buchstaben des Wortes BASEL werden Wörter der Länge $k = 3$ gebildet

ALS, LAB, BAL, SEL Wiederholungen nicht erlaubt, Ziehen ohne Zurücklegen.
 ABB, LEE, LAA, LAS Wiederholungen zugelassen, Ziehen mit Zurücklegen.

Urnenmodell:

Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln werden nacheinander k Kugeln gezogen. Wir sprechen von einer "geordneten k -Stichprobe vom Umfang k " (die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, wird berücksichtigt). Das Ergebnis kann in Form eines Wortes der Länge k festgehalten werden, wobei das Alphabet aus n Schriftzeichen besteht.

5.1 geordnete k -Stichprobe mit Zurücklegen, Wörter der Länge k , Variationen mit Wiederholungen

Ziehen mit Zurücklegen bedeutet, dass eine Kugel - nachdem sie gezogen wurde - wieder zurückgelegt wird. Jede Kugel kann damit also mehrfach gezogen werden. Sind die Kugeln mit den Zeichen des Alphabets beschriftet, so entsteht ein Wort der Länge k . Wiederholungen von Buchstaben sind möglich.

B:

Mit den $n = 5$ Buchstaben des Wortes BASEL können 5^3 Wörter der Länge $k = 3$ gebildet werden.

Allgemein gilt:

(3) Ist ein Alphabet von n Buchstaben gegeben, so gibt es n^k Wörter der Länge k

Stehen für jeden der k Plätze genau n Elemente zur Verfügung, so gibt es n^k Möglichkeiten, die n Plätze zu belegen.

Formulierungsvariante:

Statt von Wörtern der Länge k spricht man auch von Variationen von n Elementen zur k -ten Klasse. k -te Klasse bedeutet dabei, dass k Elemente ausgewählt werden.

Beispiele:

Mit den Ziffern 1 bis 9 können 9^4 verschiedene vierstellige Zahlen gebildet werden.

Beim Fussballtoto ist der Ausgang von 13 Spielen zu erraten, wobei für jedes Spiel 3 Ausgänge (1, x oder 2) möglich sind. Jede Tipkolonne besteht aus einer Folge mit 13 Zeichen aus einem Alphabet mit 3 Schriftzeichen, z.B. 1x221xxx1112x, es gibt also 3^{13} verschiedene Tipkolonnen.

Louis Braille (1805 - 1852), der selbst mit 3 Jahren erblindete, entwickelte eine Blindenschrift. Jedem Buchstaben entspricht eine Anordnung von herausgehobenen Punkten auf einem Raster mit 6 Punkten, die der Blinde mit den Fingerspitzen der einen Hand abtastet (vgl. Beilage).

Insgesamt können 2^6 Zeichen dargestellt werden, denn jedes Zeichen kann durch einen sechstelligen Code z.B. 010011 dargestellt werden (1 bedeutet Punkt herausgehoben, 0 nicht herausgehoben).

BLINDENSCHRIFT-ALPHABET NACH LOUIS BRAILLE (1809 - 1852)

Grundform

Gruppe 1: Die Punkte 3 und 6 fehlen
A B C D E F G H I J

Gruppe 2: Den Zeichen der Gruppe 1 ist Punkt 3 zugefügt.
K L M N O P Q R S T

Gruppe 3: Den Zeichen der Gruppe 1 sind die Punkte 3 und 6 zugefügt.
U V X Y Z B,SS ST

Gruppe 4: Den Zeichen der Gruppe 1 ist der Punkt 6 zugefügt.
AU EU EI CH SCH Ü Ö W

Gruppe 5: Umkehrungen der Gruppe 4
ÄÜ Ä IE Zahlenzeichen

Gruppe 6: Die Zeichen der Gruppe 1 sind um eine Stufe heruntergesetzt.
, ; : ? ! () « * »

Gruppe 7: Die Zeichen der Gruppe 1 sind um zwei Stufen heruntergesetzt.
- ' ,

Die Zahlen setzen sich aus dem Zahlenzeichen und den ersten 10 Buchstaben des Alphabets zusammen (A = 1, J = 0)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Schweizerischer Zentralverein für das Blindenwesen SZB
Union centrale suisse pour le bien des aveugles UCBA
Unione centrale svizzera per il bene dei ciechi UCBC

Überreicht vom Schweizerischen Zentralverein für das Blindenwesen SZB

P L Ö T Z L I C H S A H I C H
I N D E R Z E I T U N G N U R
N O C H D I E S C H L A G Z E I L E N
- J E T Z T B I N I C H
B L I N D .

Ob durch einen Unfall oder eine Krankheit blind oder gar taubblind werden. Wie informieren wir uns, wenn wir nichts mehr sehen? Wie, wenn wir zudem auch nichts mehr hören?

Schliessen Sie die Augen und lassen Sie die Fingerspitzen über die Zeilen gleiten. So fühlt sich «Lesen» an!

Dank der Punktschrift (Braille) können sich auch hörschbehinderte und blinde Menschen informieren.

Der sogenannte ASCII-Code (**A**merican **S**tandard **C**ode for **I**nformation **I**nterchange) besteht aus einer Folge von 8 Zeichen 0 oder 1. Mit 1 Byte bestehend aus 8 Bit können insgesamt 2^8 Zeichen dargestellt werden.

Mastermind

Bei einem Safeschloss sind 5 Einstellungen einer Ziffer zwischen 1 und 9 möglich. Insgesamt sind 9^5 verschiedene Einstellungen möglich.

5.2 geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen, Variationen ohne Wiederholungen

Die gezogene Kugel wird nicht zurückgelegt bzw. die Wörter sind aus verschiedenen Zeichen zusammengesetzt.

B:

Mit den $n = 5$ Buchstaben des Wortes BASEL können $5 \cdot 4 \cdot 3$ Wörter der Länge $k = 3$ gebildet werden, wenn Wiederholungen von Buchstaben nicht erlaubt sind. Nach der Produkt gibt es für den 1. Buchstaben 5, anschliessend für den 2. Je 4 und für den 3 noch 3 Möglichkeiten.

Das Ergebnis kann im Hinblick auf die Verallgemeinerung folgendermassen beschrieben werden:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

allg.

Ist ein Alphabet von n Buchstaben gegeben, so gibt es

$$(4) \quad n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{Wörter der Länge } k$$

Variationen ohne Wiederholungen mit n Elementen zur k -ten Klasse.

Beispiele:

Mit den Ziffern 1 bis 9 können $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{(9-4)!}$ vierstellige Zahlen mit verschiedenen Ziffern gebildet werden.

Beim Pferdetoto sind die ersten 3 einlaufenden Pferde in der richtigen Reihenfolge vorauszusagen. Es gibt insgesamt $12 \cdot 11 \cdot 10 = \frac{12!}{(12-3)!}$ verschiedene Möglichkeiten.

Die 17 Studierenden der Klasse 3X können auf 24 Stühlen auf $\frac{24!}{(24-17)!}$ Platz nehmen.

Im Unterschied zu den bisherigen vier Aufgaben ist bei der folgenden Aufgabe die Reihenfolge nicht wesentlich.