

3. Laplaceexperimente.

Beispiele:

Beim Zahlenlotto sollte jede Sechsserserie von Zahlen mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten.

Laplace-Münze: $p(K) = p(Z) = 1/2$

Laplace-Würfel: $p(1) = \dots = p(6) = 1/6$.

Roulette:

mögliche Ausfälle 0,1,2,3, ..., 36 (bei '0' gewinnt die Bank die Einsätze).

Setzen auf die geraden Zahlen: $p(\text{pair}) := 18/37$

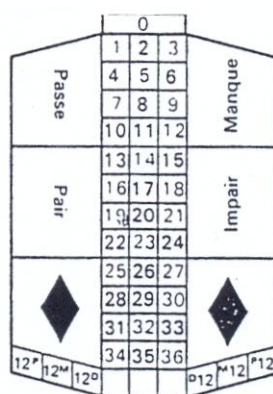
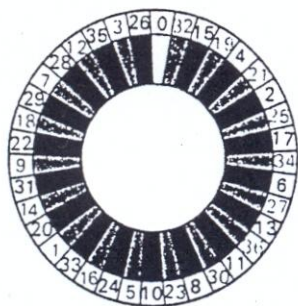


Fig. 22.1 Rad und Spielbrett des Rouletts

* Das Roulette ist wohl chinesischen Ursprungs. Die Idee, in eine sich drehende Zahlenscheibe eine Kugel zu werfen, scheint Anfang des 18. Jahrhunderts aufgefunden zu sein. 1734 veröffentlichte *M. Girardier* 6 neu erfundene Spiele, die alle auf diesem Prinzip beruhten. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts entstand in Paris die noch heute gültige Form des Roulettspiels.

Setzmöglichkeiten		Teilmenge von Ω	Auszahlung	Gewinn
Name	Beschreibung		als Vielfaches des Einsatzes	
plein	eine Zahl	z. B. $\{7\}$	36	35
à cheval	2 angrenzende Zahlen	z. B. $\{13, 16\}$	18	17
transversale pleine	Querreihe von 3 Zahlen	z. B. $\{25, 26, 27\}$	12	11
transversale simple	2 benachbarte Querreihen	z. B. $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	6	5
carré	4 Zahlen, deren Felder in einem Punkt zusammen- stoßen, bzw. die ersten 4 Zahlen	z. B. $\{14, 15, 17, 18\}$ bzw. $\{0, 1, 2, 3\}$	9	8
colonne	Längsreihe von 12 Zahlen	z. B. $\{1, 4, 7, \dots, 34\}$	3	2
douze premier	das erste Dutzend	$\{1, 2, \dots, 12\}$	3	2
douze milieu	das mittlere Dutzend	$\{13, 14, \dots, 24\}$	3	2
douze dernier	das letzte Dutzend	$\{25, 26, \dots, 36\}$	3	2
pair	alle geraden Zahlen außer 0	$\{2, 4, \dots, 36\}$	2	1
impair	alle ungeraden Zahlen	$\{1, 3, \dots, 35\}$	2	1
rouge	alle roten Zahlen	$\{1, 3, \dots, 36\}$	2	1
noir	alle schwarzen Zahlen	$\{2, 4, \dots, 35\}$	2	1
manque	die 1. Hälfte	$\{1, 2, \dots, 18\}$	2	1
passee	die 2. Hälfte	$\{19, 20, \dots, 36\}$	2	1

Im Roulette-Beispiel ist die Regel erkennbar, wie sich bei Laplaceexperimenten die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A aus der Anzahl der günstigen bzw. der möglichen Fälle berechnen lässt:

Definition der klassischen Wahrscheinlichkeit:

Sind bei einem Zufallsexperiment insgesamt m Ergebnisse möglich und sind diese miteinander unvereinbar und alle gleich wahrscheinlich dann gilt:

$$p(A) = \frac{g}{m}$$

g Anzahl der für das Ereignis A günstigen Ergebnisse
m Anzahl der möglichen, gleichwahrscheinlichen Fälle

Bei der Berechnung der möglichen und günstigen Fälle sind die Hauptergebnisse aus dem Kapitel Kombinatorik wichtig (Zählprinzip, Fakultäten, Binomialkoeffizienten).

Bem.:

In Aufgaben tauchen etwa die Formulierungen „gleichzeitiges Werfen zweier Würfel“, „nicht unterscheidbare Würfel“ auf. Diese sind für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten unerheblich. Leicht werden dadurch irrtümlich Ergebnisse als gleichwahrscheinlich betrachtet. Fehler können also vermieden werden, wenn die Würfel als unterscheidbar betrachtet bzw. die Münzen nacheinander geworfen werden.

B:

Beim Werfen zweier Würfel ist das Ereignis Augensumme 3 (die Ergebnisse (1,2) und (2,1) sind günstig), doppelt so wahrscheinlich wie Augensumme 2 (nur das Ergebnis (1,1) ist günstig).

Beispiele:

Lotterie:

40 von 400 Losen sind Treffer. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gekauftes Los gewinnt ist

$$p(A) = \frac{40}{400}$$

Jassen:

Aus den 36 Karten wird eine gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Karte ein As ist beträgt

$$p(A) = \frac{4}{36}$$

Eine L-Münze wird zweimal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

A: zweimal Kopf B. zweimal Zahl C. Genau einmal Kopf zu werfen.

Als Vorübung dient der folgende Zufallsversuch:

Jede Schülerin wirft zwei verschiedene Münzen $n = 30$ mal und 30-mal die relativen Häufigkeiten der Ereignisse A, B, C.

Im Klassenversuch ergaben sich die folgenden relativen Häufigkeiten:

für A: 0.228, für B 0.262 und für C: 0.510

Das Experiment zeigt, dass die drei Ereignisse nicht gleichwahrscheinlich sind. Hingegen sind die folgenden vier möglichen Ergebnisse gleichwahrscheinlich:

KK, KZ, ZK, ZZ

Für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten gilt damit:

$$p(A) = \frac{1}{4} \qquad p(B) = \frac{2}{4} \qquad p(C) = \frac{1}{4}$$

Ein roter und ein grüner L-Würfel werden (nacheinander) geworfen. Die 36 möglichen (gleichwahrscheinlichen) Ergebnisse lassen sich als Zahlenpaare (r,g) darstellen mit r: Augenzahl des roten Würfels, g: Augenzahl des grünen Würfels.
Zu jeder der 6 Augenzahlen des roten Würfels lassen sich je 6 Augenzahlen des grünen Würfels angeben.

11, 12, 13, 14, 15, 16
21, 22, 23, 24, 25, 26
31, 32, 33, 34, 35, 36
41, 42, 43, 44, 45, 46
51, 52, 53, 54, 55, 56
61, 62, 63, 64, 65, 66

A: keine 6 werfen $p(A) = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$

"Wahrscheinlichkeit mit dem roten Würfel keine Sechs zu werfen mal
Wahrscheinlichkeit mit dem grünen Würfel keine Sechs zu werfen"

B: 2 verschiedene Augenzahlen zu werfen. $p(B) = \frac{6 \cdot 5}{6 \cdot 6} = 1 \cdot \frac{5}{6}$
für die Augenzahl des 1. Wurfs besteht keine Einschränkung, beim 2. Wurf ist die beim 1. Wurf erreichte Augenzahl auszuschliessen.

C: eine 3 und eine 5 werfen: $p(C) = \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 6} = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}$
im 1. Wurf 3 oder 5, im 2. Wurf die fehlende Augenzahl

D: eine 3 oder eine 5 werfen: Achtung vor Doppelzählungen!
betrachte das Gegenereignis $\bar{D}$: weder 3 noch 5 werfen

$$p(\bar{D}) = \frac{16}{36} \quad p(D) = 1 - p(\bar{D}) = 1 - \frac{16}{36} = \frac{20}{36}$$

E: Augensumme 8 werfen $p(E) = \frac{5}{36}$
günstig sind die 5 Zahlenpaare (2,6), (3,5), (4,4), (5,3) und (6,2)
Lösungsvariante:

Zu jeder der fünf Augenzahlen des einen Würfels gibt es je eine passende Augenzahl des andern.

F: höchstens eine 6 werfen $\bar{F}$: eine Doppelsechs werfen
 $p(\bar{F}) = \frac{1}{36} \quad p(F) = 1 - p(\bar{F}) = \frac{35}{36}$

G: genau eine Sechs werfen $p(G) = \frac{20}{36} = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$
Die 6 kann entweder an 1. oder an 2. Stelle gezogen werden.

Eine historische Aufgabe:

Warum erscheint beim Wurf dreier Würfel die Augensumme 10 häufiger als die Summe 9, obwohl beide Summen auf 6 Arten eintreten können?

zur Vorbereitung

Unterscheide die beiden folgenden Ereignisse:

A: zuerst eine 1, dann eine 2 und schliesslich eine 6 werfen

B: eine 1, eine 2 und eine 6 werfen

B ist sechsmal wahrscheinlicher als A. Es kommt nicht nur darauf an, welche Augenzahlen auftreten, sondern auch auf welchen Würfeln sie auftreten!

Augensumme 9: 126 (zählt 3!-fach), 135 (3!-fach), 144 (3-fach), 225 (3-fach),
234 (3!-fach), 333 (einfach) $g = 25$

$$p(\text{Augensumme } 9) = \frac{25}{216}$$

Augensumme 10: $g = 27$

$$p(\text{Augensumme } 10) = \frac{27}{216}$$

Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit kann sinngemäss auch auf geometrische Beispiele übertragen werden durch die Definition der geometrischen Wahrscheinlichkeit:

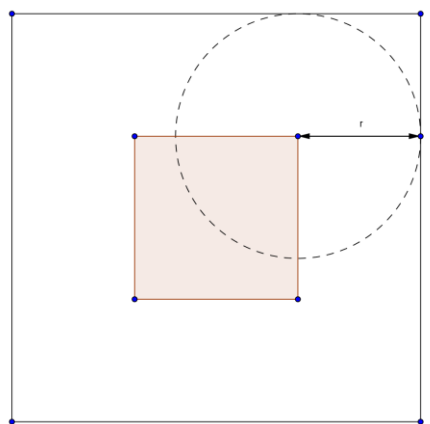
$$p(A) = \frac{\text{Inhalt der günstigen Fläche}}{\text{Inhalt der möglichen Fläche}}$$

Aufgabe:

Ein Geldstück mit Radius r wird auf ein Schachbrett mit quadratischen Feldern der Seitenlänge $a > 2r$ geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze innerhalb eines Quadrats zu liegen kommt?

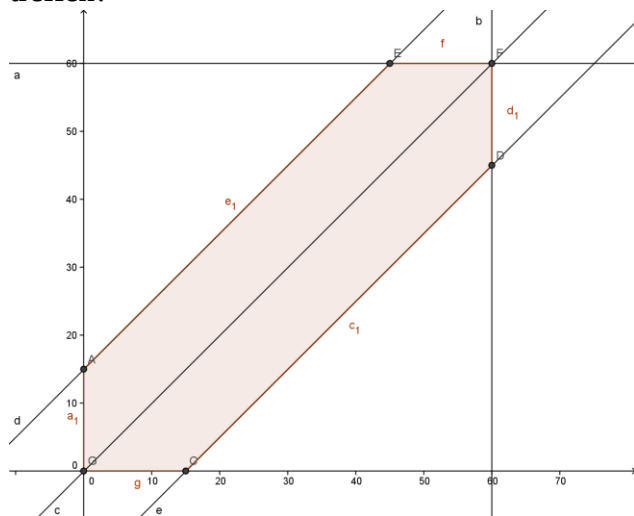
Betrachte die Lage des Mittelpunkts des Geldstücks.
Günstig für die Lage des Mittelpunkts ist ein Quadrat mit der Seite $a - 2r$

$$p(A) = \frac{(a - 2r)^2}{a^2} = \frac{\text{Inhalt der günstigen Fläche}}{\text{Inhalt der möglichen Fläche}}$$



Aufgabe:

Xaver und Yvonne wollen sich zwischen 12 und 13 Uhr im Cafe treffen. Beide gehen sicher in dieser Zeitspanne dorthin, wissen aber nicht genau wann. Sie haben abgemacht, dass sie höchstens 15 Minuten aufeinander warten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich treffen?



$$p = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{1575}{3600} \approx 43.8\%$$

Mögliche Ergänzungen:

Das Bertrand'sche Paradoxon

Das Nadelproblem von Buffon