7. Mindestens ein Erfolg, lauter Fehlschläge

Bei Fragestellungen mit „mindestens" ist es allenfalls zweckmässig, das Gegenereignis zu betrachten.

Aufgabe:
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Laplace-Würfel in vier Würfen mindestens eine Sechs zu werfen?

A: In 4 Würfen 1 oder 2 oder 3 oder 4 Sechser werfen.
Gegenereignis $\overline{A}$: in 4 Würfen keine Sechs werfen
Wegen $p(\overline{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^4$ ist $p(A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$

Merke:
Das Gegenereignis von A: "mindestens ein Erfolg" ist $\overline{A}$: "lauter Fehlschläge".
Damit gilt p(A) = 1 - p($\overline{A}$).

Für welche Wurfzahl n wird die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Sechs zu werfen, grösser als 95% ?

$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0.95 \qquad -\left(\frac{5}{6}\right)^n > -0.05 \quad \Big| \cdot(-1)$

$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.05$ logarithmieren

$n \cdot \lg\left(\frac{5}{6}\right) < \lg 0.95$ durch $\lg\left(\frac{5}{6}\right) < 0$ dividieren

$n > \frac{\lg 0.05}{\lg\left(\frac{5}{6}\right)} = 16.43 \quad n \geq 17$

Für welche Wurfzahl wird die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen grösser als 95%? (sechsmal so gross ?)

Lösung: $n > \frac{\lg 0.05}{\lg\left(\frac{35}{36}\right)} = 106.3 \qquad n \geq 107$

Diese beiden Probleme eines gewissen **Chevalier de Méré** sind Gegenstand eines Briefwechsels zwischen Pascal und Fermat aus dem Jahr 1654. De Méré war der Meinung, dass beide Gewinnwahrscheinlichkeiten beiden folgenden Spielen gleich gross sein müssten:
Spiel 1: in 4 Würfen mindestens eine Sechs
Spiel 2: in 24 Würfen mit 2 Würfeln mindestens eine Doppelsechs
Beim 2. Spiel ist bei jedem Wurf die Anzahl der möglichen Ergebnisse sechsmal grösser, was durch die Versechsfachung der Würfe ausgeglichen werde. Da er beim Spielen in diesem Proportionalitätsdenken enttäuscht wurde, wandte er sich an Pascal.

Das Geburtstagsproblem:
In einem Raum sind n Personen versammelt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?

A: mindestens 2 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag.
$\overline{A}$: n Personen haben verschiedene Geburtstage.

Annahme: Das Jahr hat 365 gleichwahrscheinliche Geburtstage.

$$p(\overline{A})=\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdot ......\cdot(365-n+1)}{365^n} \qquad p(A)=1-p(\overline{A})$$

n	p(A)
23	50.7%
41	90.3%
47	95.4%
57	99.0%

Vergleiche die Grafik auf der nächsten Seite (ac).

Unterscheide dieses Problem vom folgenden:
In einem Zimmer sind ausser mir noch n Personen anwesend. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person meinen Geburtstag hat ?

A: mindestens eine von n Personen hat am gleichen Tag Geburtstag wie ich.
$\overline{A}$: n Personen haben einen andern Geburtstag als ich.

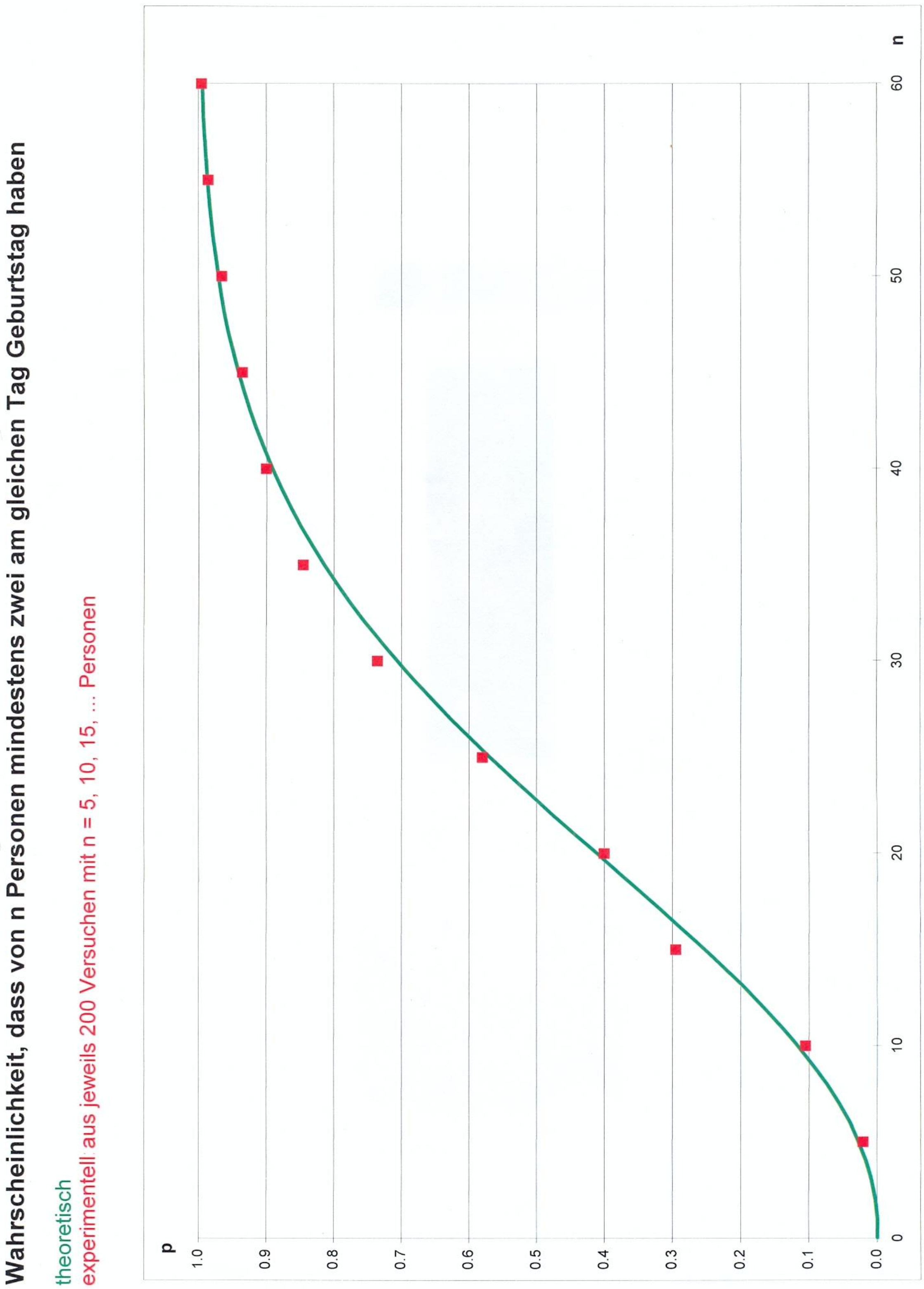
$$p(A)=1-p(\overline{A})=1-\left(\frac{364}{365}\right)^n > 0.5$$

$$\left(\frac{364}{365}\right)^n < 0.5 \qquad \text{logarithmieren}$$

$$n > \frac{\ln 0.5}{\ln\left(\frac{364}{365}\right)} = 252.7$$

Diese Wahrscheinlichkeit wird für n = 253 erstmals > 50%

Die unterschiedlichen Resultate sind plausibel:
Sind ausser mir 253 Personen anwesend, so sind dies 253 Gelegenheiten für meinen Geburtstag.
Mit n = 23 Personen lassen sich $\binom{23}{2}=253$ Paare bilden. Damit gibt es 253 Gelegenheiten für einen gleichen Geburtstag (an irgendeinem Tag, nicht an meinem Geburtstag!).



Uebungsaufgabe:
Am ersten Schultag möchte der Schulleiter – falls es unter den Kindern eines gibt, das an diesem Tag Geburtstag hat - dem Kind gratulieren. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 206 Kindern mindestens ein Geburtstagskind ist?
Lösung:

$$1-\left(\frac{364}{365}\right)^{206} \approx 0.432$$