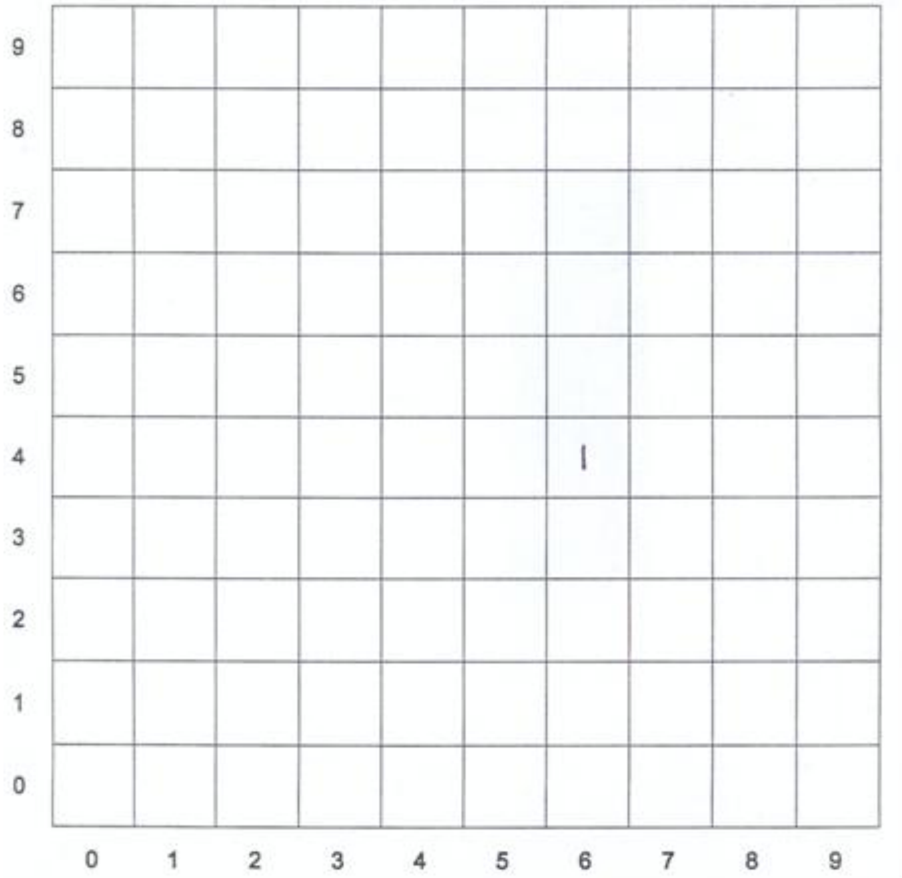
Das Rosinenproblem
(Schülernotiz: Ulrichs Lieblingsaufgabe, er mag jedoch keine Rosinen):
In einen Kuchenteig bringt man 100 Rosinen. Anschliessend bildet man 100 Kuchenstücke.
Wieviele Kuchenstücke enthalten keine, genau 1,2,3, mehr als 3 Rosinen?

Lösung durch Simulation. Diese Methode heisst auch **Monte-Carlo-Methode**
Der Zufallsprozess wird mit Zufallszahlen „nachgespielt". Diese Zufallszahlen - besser Pseudozufallszahlen - werden mit sogenannten Zufallsgeneratoren erzeugt, die vorgegebene statistische Tests erfolgreich bestehen.
Jede Schülerin liest die Tabelle der Zufallszahlen in Formeln und Tafeln zweistellig und trägt das Resultat in das betreffende Feld ein (z.B. Feld 64 im folgenden Bild) .



Ein mögliches Resultat ist in der folgenden Graphik dargestellt:

		2		1	3			1	1
1	2	1	2		1				
1	1				1	1		4	1
2				1	2	1	1		3
	2		2	1	1	1	1		
	1	1	2	1		1	2		
1	1				2		2		2
2	2		2	3	2	1	2	1	
4	3	1	1	1	2		1	3	1
	3	1		1	3	1		1	

Die einzelnen Resultate eines Klassenversuchs sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst

Rosinen 4C 14.11.2007

Anzahl Rosinen	0	1	2	3	> 3
1	32	46	13	8	1
2	35	42	15	5	3
3	39	33	21	5	2
4	38	35	19	6	2
5	**43**	**30**	14	**9**	4
6	42	34	**12**	7	**5**
7	39	30	**25**	4	2
8	37	37	17	7	2
9	**29**	**46**	21	4	0
10	39	32	22	5	2
11	36	36	20	8	**0**
12	38	36	17	7	2
13	40	32	20	5	3
14	35	38	21	4	2
15	39	34	19	5	3
16	36	36	21	6	1
17	33	42	20	**3**	2
18	39	30	24	6	1
19	32	40	22	5	1
Min	29	30	12	3	0
Max	43	46	25	9	5
emp. Mittelwert	**36.9**	**36.3**	**19.1**	**5.7**	**2.0**
Erwartungswert	**36.6**	**37.0**	**18.5**	**6.1**	**1.8**

Rechnerische Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Feld genau x der 100 Rosinen enthält ist

$$P_{100}(x) = \binom{100}{x} \cdot 0.01^x \cdot 0.99^{100-x} \quad (*)$$

In der folgenden Tabelle ist der Erwartungswert $100 \cdot P_{100}(x)$ angegeben und zusätzlich Mittelwerte, die sich im Klassenversuch ergeben haben. Die Zahlen geben an, wieviele Felder theoretisch leer bleiben, genau 1, 2, 3 oder mehr als 3 Rosinen enthalten.

x	Anzahl Felder	Erwartungswert
0	36.9	36.6
1	36.3	37.0
2	19.1	18.5
3	5.7	6.1
>3	2.0	1.8

(*)

Wegen $\left(\frac{99}{100}\right)^{100} = (1-\frac{1}{100})^{100} \approx e^{-1} = \frac{1}{e}$ bleiben im Mittel ungefähr $\frac{100}{e} \approx 36.8$ Felder leer.

Dieses Resultat kann folgendermassen für hinreichend grosse n verallgemeinert werden:

Das 1/e-Gesetz
Verteilt man n Objekte zufällig auf n Felder so bleiben ungefähr $\frac{n}{e}$ Felder leer.

Einige Einkleidungen.
Wird ein Rouletterad 37-mal gedreht, so wird die Kugel auf $\frac{37}{e} \approx 13.6$ Felder nicht zu liegen kommen.
Werden die Geburtstage von 365 zufällig ausgewählten Personen erfasst, dann sind $\frac{365}{e} \approx 134.3$ Tage des Jahres ohne Geburtstagskind.

Siehe auch: www.landrat-lucas.de/ -> MINT -> Stochastik -> Präsentationen zu den Vorträgen

Ideen für weitere Simulationen:

Problem des Chevalier de Méré:

Würfel	Tabelle einstellig lesen, 0, 7, 8, 9 überlesen
Doppelwürfel	zwei Würfelzahlen zu einem Doppelwurf zusammenfassen
Geburtstagsbeispiel	dreistellig lesen und Ziffernfolgen 366, ..., 500, 866, ... 000 überlesen