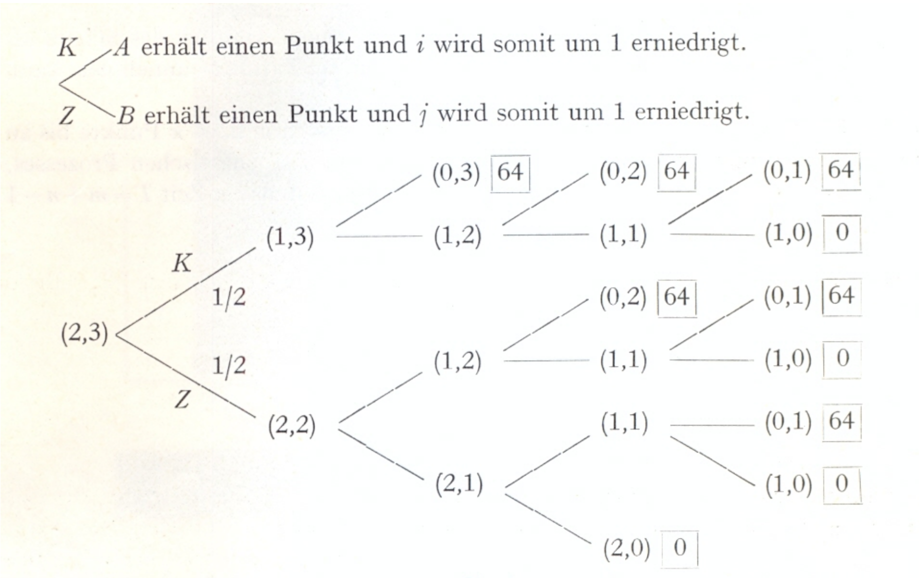
Glücksspiele, das Sammlerproblem

Das folgende Problem spielt in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine grosse Rolle. Es geht um die gerechte Aufteilung des Spieleinsatzes bei vorzeitigem Abbruch eines Glückspiels. Pierre Fermat (1601 -1665) löste das Problem kombinatorisch, Blaise Pascal (1623 – 1662) mit der Idee des erwarteten Erlöses.

Problème des parties (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Teilungsproblem)
Zwei Spieler A und B leisten je einen Einsatz von S = 32 Fr. und vereinbaren folgendes Glückspiel: Fällt eine symmetrische Münze auf Kopf (K) erhält A einen Punkt, andernfalls B. Wer als Erster 7 Punkte erreicht gewinnt 2S = 64 Fr.. Aus einem unbekannten Grund muss das Spiel zu dem Zeitpunkt abgebrochen werden als A über 5 und B über 4 Punkte verfügen. In welchem Verhältnis ist der Gesamteinsatz 2S gerechterweise zu verteilen?

Lösung nach Pascal:
In der Abbildung ist das künftige Geschehen für beide Spieler aus der Sicht von A dargestellt. Dabei bezeichnet (i,j) den Zustand, indem Spieler A noch i und Spieler B noch j Punkte zum Gewinn benötigt-
Im Zustand (0,j) erhält A den gesamten Einsatz 2S und B geht leer aus.
Im Zustand (i,0) erhält B den gesamten Einsatz 2S und A geht leer aus.



Für den erwarteten Erlös von A erhält man dann
$E_A = ((\tfrac{1}{2})^2 + 2\cdot(\tfrac{1}{2})^3 + 3\cdot(\tfrac{1}{2})^4)\cdot 64 = 44$ und für den von Spieler B entsprechend
$E_B = 20$

Der totale Einsatz ist damit zwischen A und B im Verhältnis $\frac{E_A}{E_B} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5}$ aufzuteilen.

Lösung von Fermat:
Spätestens nach 4 Würfen steht fest, welcher Spieler den Gesamteinsatz gewinnt. Erreicht inskünftig A noch einen und B zwei Punkte dann steht das Spiel unentschieden und beide benötigen zum Gewinn noch einen Punkt.
In der folgenden Liste sind die $2^4 = 16$ künftig möglichen Spielverläufe aufgeführt, wobei der Buchstabe angibt, welcher Spieler den Punkt bekommt. In den mit * bezeichneten Fällen gewinnt A:

* AAAA	* ABAA	* BAAA	* BBAA
* AAAB	* ABAB	* BAAB	BBAB
* AABA	* ABBA	* BABA	BBBA
* AABB	ABBB	BABB	BBBB

Da A in 11 Fällen und B in 5 Fällen gewinnt ist der Gewinn im Verhältnis 11:5 aufzuteilen.

Übungsaufgaben:

a)
Erraten einer von drei verdeckten Karten
(Reminiszenz von der Studienwoche einer Klasse nach Paris)

"Gewinne":	x_i	100	-100
zugehörige Wahrsch.	$p(x_i)$	$^1/_3$	$^2/_3$

Mittlerer "Gewinn" pro Spiel (sogenannter Erwartungswert) $\mu = -\frac{100}{3}$
Da die Organisatoren das Spiel nicht fair durchführten, verloren die teilnehmenden Schüler trotz vorgängiger Warnung des Klassenlehrers allesamt 100 Francs.

b)
Roulette
Der Spieler setzt seinen Einsatz $e > 0$ auf eine der Zahlen 0, 1, 2, ... , 36
Landet die Kugel auf dem gewählten Zahlenfeld, so erhält er 36e zurück (gewinnt also 35e), andernfalls verliert er seinen Einsatz.

Der Gewinn ist eine Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

"Gewinne"	x_i	35e	-e
zugehörige Wahrsch	$p(x_i)$	$^1/_{37}$	$^{36}/_{37}$

Erwartungswert beim Roulette: $\mu = -\frac{e}{37}$

c)
"Chuck-a-luck" (USA) "crown and anchor" (engl.)
Ein Spieler setzt auf eine der Augenzahlen. Es werden 3 Würfel geworfen. Erscheint seine Zahl 1, 2, 3 mal, so gewinnt er das 1-, 2-, 3- fache seines Einsatzes, andernfalls verliert er seinen Einsatz. Wir wählen als Spezialfall für den Einsatz 1 Fr.

x_i	-1	1	2	3	
$p(x_i)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3	mit $p = {^1/_6}$ bzw. $q = {^5/_6}$

Erwartungswert $\mu = -\frac{17}{216}$

Das Sammlerproblem (Warten auf einen vollständigen Satz) (optional)

Wie oft muss man einen Laplace-Würfel werfen, bis alle Augenzahlen mindestens einmal aufgetreten sind?

Simulation in einem Klassenexperiment.
Jede Schülerin wirft einen Würfel so lange, bis ein vollständiger Satz der Augenzahlen vorliegt. Die Anzahl der dazu nötigen Versuche wird für jede Schülerin notiert und der empirische Mittelwert bestimmt mit dem Resultat: 14.07.
Simulation mit einer Tafel von Zufallsziffern (Ziffern 7, 8, 9, 0 werden überlesen).

Für die mittlere Wartezeit t bei n Merkmalen gilt (ohne Beweis):

$$t = n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \qquad \rightarrow \text{Harmonische Reihe}$$

Im Würfelbeispiel ergibt sich für die mittlere Anzahl der Versuche t = 14.7

Lösung mit Excel

Beim 1. Wurf wird eine Augenzahl besetzt, beim 2. eine weitere oder die bereits geworfene.

	Zustand k : # belegte Wurfzahlen			
i: # Würfe	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0.167	0.833	0	0
3	0.028	0.417	0.556	0
4	0.005	0.162	0.556	0.278
5	0.001	0.058	0.386	0.463

Der Zustand (i,k) (grün gefärbte Zelle) bedeutet: Nach i = 5 Würfen sind k = 4 verschiedene Augenzahlen geworfen worden. Eine bestimmte grüne Zelle (i,k) kann nur von den beiden gelben Zellen aus erreicht werden. die unmittelbar darüber liegende Zelle (i-1,k) bzw. die links darüber liegende Zelle (i -1, k -1).
Im ersten Fall erscheint eine der k belegten Wurfzahlen mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_D = \frac{k}{n}$$

Im zweiten Fall erscheint eine der n-(k - 1) noch nicht belegten Wurfzahlen. mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_L = \frac{n-k+1}{n}$$

Dieser Fall kann in der 1. Spalte nicht auftreten.
Bezeichnen wir die im darüber liegenden Feld eingetragene Besuchswahrscheinlichkeit mit D. und entsprechend die Besuchswahrscheinlichkeit im links darüber liegenden Feld mit L dann gilt für die Besuchswahrscheinlichkeit im grünen Feld.

$$p_L \cdot L + p_D \cdot D$$

Damit ergibt sich die folgende Tabelle:

n: Anzahl Zustände 6

i: # Würfe	Zustand k : # belegte Wurfzahlen 1	2	3	4	5	6	p(X = n)	E(X)	E(X^2)
1	1	0	0	0	0	0			
2	0.167	0.833	0	0	0	0			
3	0.028	0.417	0.556	0	0	0			
4	0.005	0.162	0.556	0.278	0	0			
5	0.001	0.058	0.386	0.463	0.093	0			
6	0.000	0.020	0.231	0.502	0.231	0.015	0.015	0.093	0.556
7	0.000	0.007	0.129	0.450	0.360	0.054	0.039	0.270	1.890
8	0.000	0.002	0.069	0.365	0.450	0.114	0.060	0.480	3.841
9	0.000	0.001	0.036	0.278	0.497	0.189	0.075	0.675	6.076
10	0.000	0.000	0.019	0.203	0.506	0.272	0.083	0.828	8.277
35	0.000	0.000	0.000	0.000	0.010	0.990	0.002	0.071	2.482
36	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.992	0.002	0.061	2.190
37	0.000	0.000	0.000	0.000	0.007	0.993	0.001	0.052	1.928
38	0.000	0.000	0.000	0.000	0.006	0.994	0.001	0.045	1.695
39	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.995	0.001	0.038	1.489
40	0.000	0.000	0.000	0.000	0.004	0.996	0.001	0.033	1.305
41	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.997	0.001	0.028	1.143
42	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.997	0.001	0.024	1.000
43	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.998	0.000	0.020	0.873
						Summe	1.000	14.699	254.980
									6.239

Aufgabe 1:
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in n = 6 Würfen sechs verschiedene Augenzahlen zu werfen? (Geburtstagsproblem)
Die Lösung 0.015 ist gelb gefärbt. Die darüber stehenden Nullen sind einsichtig. Der darunter stehende Wert 0.054 bedeutet die Wahrscheinlichkeit in (höchstens) 7 Würfen alle Augenzahlen zu werfen. Die Wahrscheinlichkeit mit 7 Würfen erstmalig alle Augenzahlen zu werfen, ergibt sich damit aus der Differenz 0.054 – 0.015 = 0.039 , die in der nächsten Spalte dargestellt ist.

Aufgabe 2:
Für welche Wurfzahl ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Augenzahlen wenigstens einmal aufgetreten sind, grösser als 99%.
Die Lösung 0.992 nach 36 Würfen ist grün gefärbt

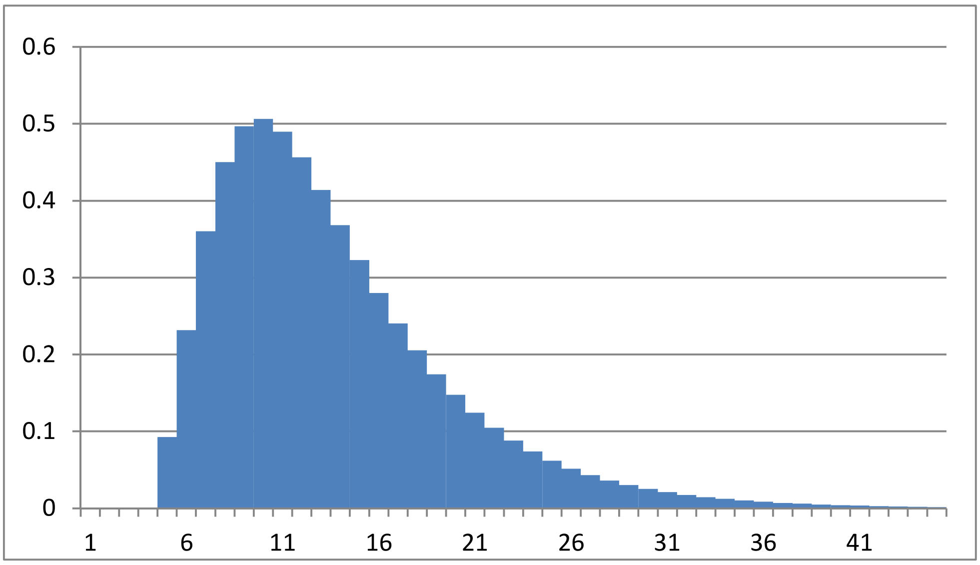
Aufgabe 3:
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei i = 2, 3, 4, 5, 6 Würfen keine Augenzahl mehrfach auftritt (Geburtstagsproblem)
Die Lösungen sind braun bzw. gelb gefärbt (0.556, 0.278, 0.093, 0.015):

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der benötigten Würfe an (Siehe 1. Spalte) , um alle Augenzahlen zu würfeln. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind in der Spalte P(X = n) dargestellt. Die erwartete Anzahl der Würfe, die benötigt wird um alle Augenzahlen zu werfen ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen X (bzw. beim Sammelbildproblem die Anzahl der erforderlichen Bilder, damit die Sammlung vollständig ist):
Der (blau gefärbte) Erwartungswert beträgt 14.7.
Die Varianz V(X) wird mit der Spalte $E(X^2)$ berechnet:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Die Standardabweichung (lila gefärbt) ergibt sich als Wurzel aus der Varianz.

In der folgenden Graphik ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X (Anzahl der benötigten Würfe für einen vollständigen Satz von Augenzahlen) dargestellt:



Für grosse n gilt näherungsweise:

$$t \approx n \cdot (\ln n + 0.5772156649..)$$

Die Zahl heisst Eulersche Konstante.

im Würfelbeispiel erhält man den Näherungswert t ≈ 14.2

Folgerung:
In einer zufällig zusammengestellten Gruppe von 2400 Personen sind theoretisch alle möglichen Geburtstage vertreten.

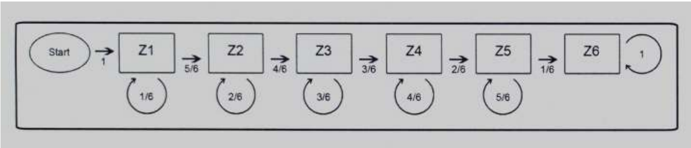
Weitere Anwendungen des Sammlerproblems

Teure Bücher
Ein Vater will seinem fussballbegeisterten Sohn ein Album mit 360 Abbildungen von Fussballern sponsern. Das Buch ist gratis, 6 zufällig zusammengestellte Bilder kosten 40 Rp. Wieviele Bilderserien muss er theoretisch kaufen, bis das Album vollständig ist?

Für $n = 360$ erhält man $t \approx 2327$. Er muss also 394 Serien zu 40 Rp. kaufen zu Fr. 157.60

Ergänzung: Lösung des Problems unter Verwendung von Markov-Ketten

Wechselt ein System schrittweise mit konstanten Wahrscheinlichkeiten zwischen endlich vielen Zuständen so spricht man von Markov-Ketten.
Beim Sammlerproblem kann der Prozess durch den folgenden sogenannten Uebergangsgraphen veranschaulicht werden:



Dabei bedeutet Z4, dass bisher genau 4 verschiedene Augenzahlen aufgetreten sind. Die Wahrscheinlichkeit eine der bisherigen Augenzahlen zu werfen ist $^4/_6$ und mit der Wahrscheinlichkeit $^2/_6$ wirft man eine neue. Bei Z6 liegt eine vollständige Serie vor Z6 heisst absorbierender Zustand, die andern Zustände heissen innere Zustände.
Die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Uebergänge können in einer sogenannten Uebergangsmatrix dargestellt werden. In der i = 2. Zeile und k = 3. Spalte steht die Wahrscheinlichkeit, vom Zustand Z2 in den Zustand Z3 zu gelangen (im Beispiel 4/6)

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{ccccccc} \textit{nach} & S & Z1 & Z2 & Z3 & Z4 & Z5 & Z6 \end{array} \\ \begin{array}{r} S \\ Z1 \\ Z2 \\ U = \textit{von}\ Z3 \\ Z4 \\ Z5 \\ Z6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/6 & 3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/6 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Uebergangsmatrix ist eine sogenannte stochastische Matrix, bei der die Summe der Wahrscheinlichkeiten einer Zeile immer 1 ist.
Für die mittlere Schrittzahl um von einem inneren Zustand in den absorbierenden Zustand Z6 zu gelangen gilt die sogenannte **2. Mittelwertsregel**, die am folgenden Beispiel skizziert wird:

Vom Zustand Z5 benötigt man mit der Wahrscheinlichkeit $^1/_6$ noch 1 Schritt bis Z6 und mit der Wahrscheinlichkeit $^5/_6$ noch 1 Schritt und zusätzlich die Anzahl der Schritte, die von Z5 aus notwendig sind, womit gilt:

$m_5 = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot (1 + m_5) = 1 + \frac{5}{6} \cdot m_5$

$m_4 = 1 + \frac{4}{6} \cdot m_4 + \frac{2}{6} \cdot m_5$

$m_3 = 1 + \frac{3}{6} \cdot m_3 + \frac{3}{6} \cdot m_4$

$m_2 = 1 + \frac{2}{6} \cdot m_2 + \frac{4}{6} \cdot m_3$

$m_1 = 1 + \frac{1}{6} \cdot m_1 + \frac{5}{6} \cdot m_2$

$m_S = 1 + m_1$

Aus der 1. Gleichung ergibt sich $m_5 = 6$ und anschliessend durch zeilenweises Einsetzen
$m_4 = 9 \rightarrow m_3 = 11 \rightarrow m_2 = \frac{25}{2} \rightarrow m_1 = \frac{137}{10} \rightarrow m_S = \frac{147}{10}$