Stetige Zufallsvariable, Normalverteilung

Die in den folgenden Beispielen dargestellten Verteilungen haben ungefähr Glockenform. Sie können durch die sogenannte Normalverteilung oder Gaussverteilung gut beschrieben werden. Gauss hat diese Verteilung im Zusammenhang mit der Theorie der Messfehler eingeführt. Sie spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik eine zentrale Rolle.

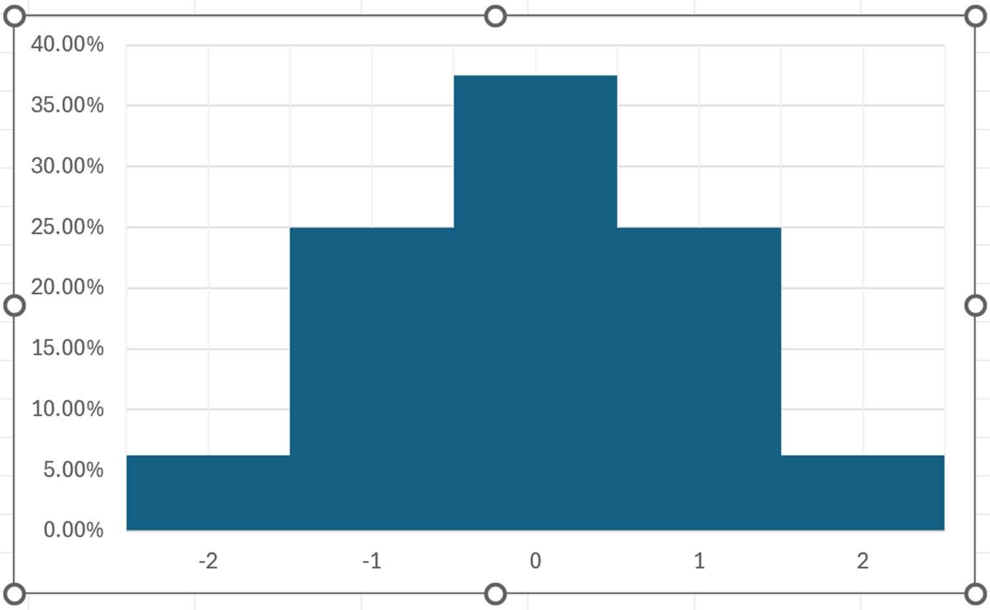
Beispiele für glockenförmige Verteilungen

a) (Quelle:Ineichen)
Wird eine physikalische Grösse sehr oft gemessen, so setzen sich die Messfehler aus vielen unabhängigen kleinen Fehlern zusammen, die den Wert teils vergrössern, teils verkleinern. In vielen Fällen kann man deshalb davon ausgehen, dass der Gesamtfehler angenähert normalverteilt ist.

Elementarfehler	-0.5	0.5			
Zugehörige Wahrscheinlichkeit	0.5	0.5			
bei n=4 Fehlerquellen					
Anzahl positive Elementarfehler	0	1	2	3	4
Anzahl negative Elementarfehler	4	3	2	1	0
Gesamtfehler	-2	-1	0	1	2
Wahrscheinlichkeit	6.25%	25.0%	37.5%	25.0%	6.25%

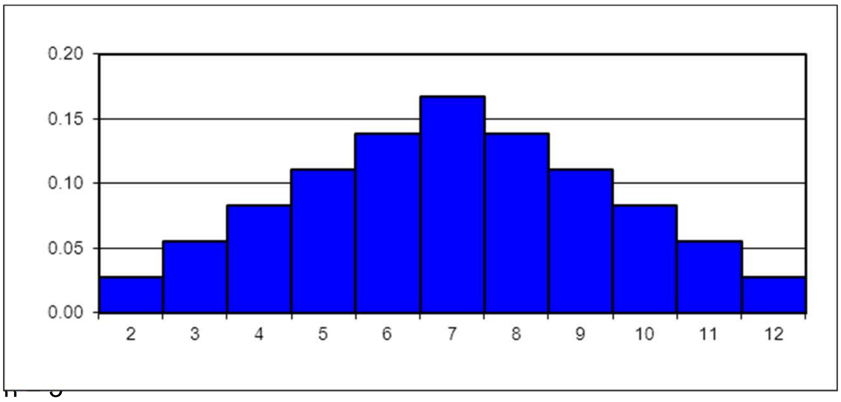
Der Gesamtfehler iist binomialverteilt. Für n = 4 ist das Histogramm bereits glockenförmig.

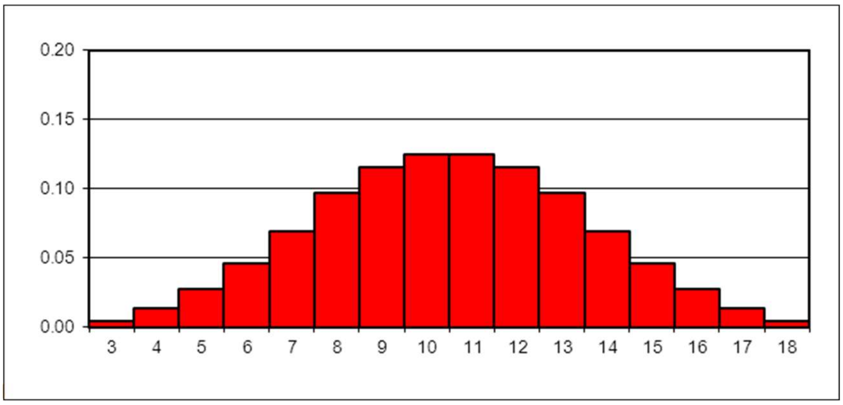
Bei mehr als vier Fehlerquellen ist dies noch ausgeprägter der Fall.

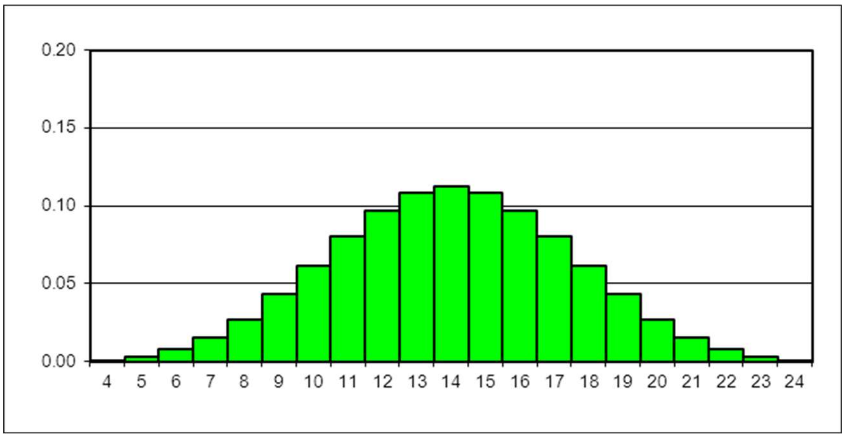


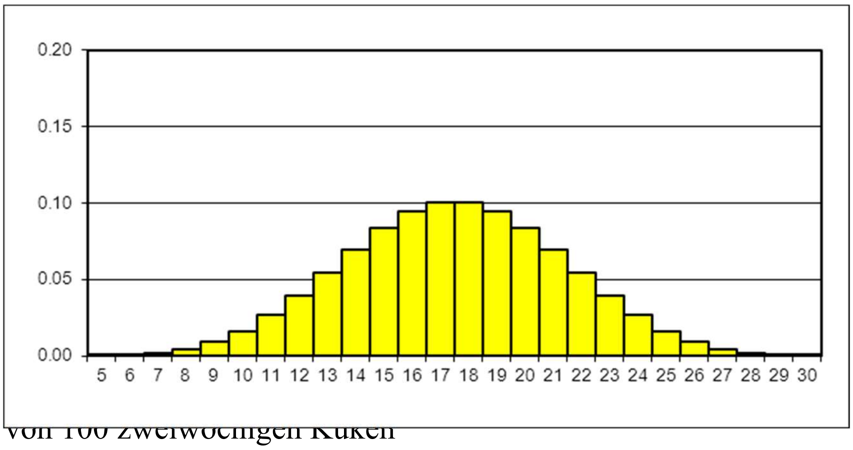
b)
Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable „Augensumme beim n-fachen Würfeln“
auf der nächsten Seite (Quelle: Strick)

n = 2









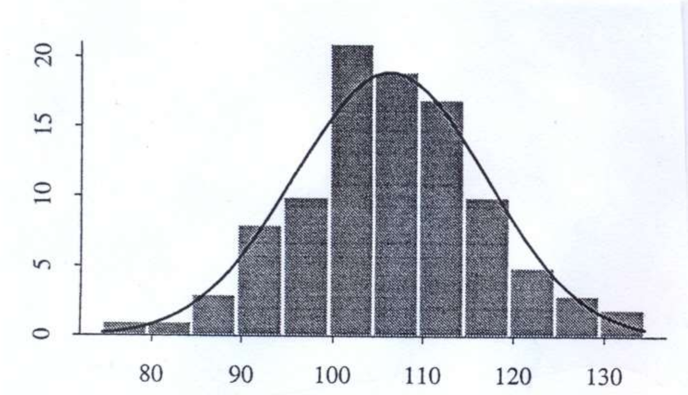
c)
Gewichte von 100 zweiwöchigen Küken
(Quelle: Künsch: Angewandte Statistik))

Gewichte von 100 zweiwöchigen Küken in g

107	117	105	106	114	105	113	88	119	116
108	98	104	126	102	100	120	121	87	110
111	114	121	114	104	94	101	94	95	114
101	82	111	108	100	109	92	96	108	108
97	92	112	105	112	100	108	105	97	119
113	102	103	100	94	102	104	110	127	102
109	100	76	101	95	96	118	91	118	107
105	112	92	99	118	100	130	112	110	103
116	115	96	125	97	114	111	101	101	90
122	106	109	116	103	134	86	124	107	107

Klasse	Stamm	Blatt	Häufigkeiten ℓ	abs. h_ℓ	rel. f_ℓ
75-79	7+	6	1	1	0.01
80-84	8	2	2	1	0.01
85-89	8+	8 7 6	3	3	0.03
90-94	9	4 4 2 2 4 1 2 0	4	8	0.08
95-99	9+	8 5 6 7 7 5 6 9 6 7	5	10	0.10
100-104	10	4 2 0 4 1 1 0 0 2 3 0 2 4 2 0 1 0 3 1 1 3	6	21	0.21
105-109	10+	7 5 6 5 8 8 9 8 8 5 8 5 9 7 5 6 9 7 7	7	19	0.19
110-114	11	4 3 0 1 4 4 4 1 2 2 3 0 2 2 0 4 1	8	17	0.17
115-119	11+	7 9 6 9 8 8 8 6 5 6	9	10	0.10
120-124	12	0 1 1 2 4	10	5	0.05
125-129	12+	6 7 5	11	3	0.03
130-134	13	0 4	12	2	0.02

Stamm-und-Blatt-Darstellung und absolute und relative Häufigkeiten für die Kükengewichte



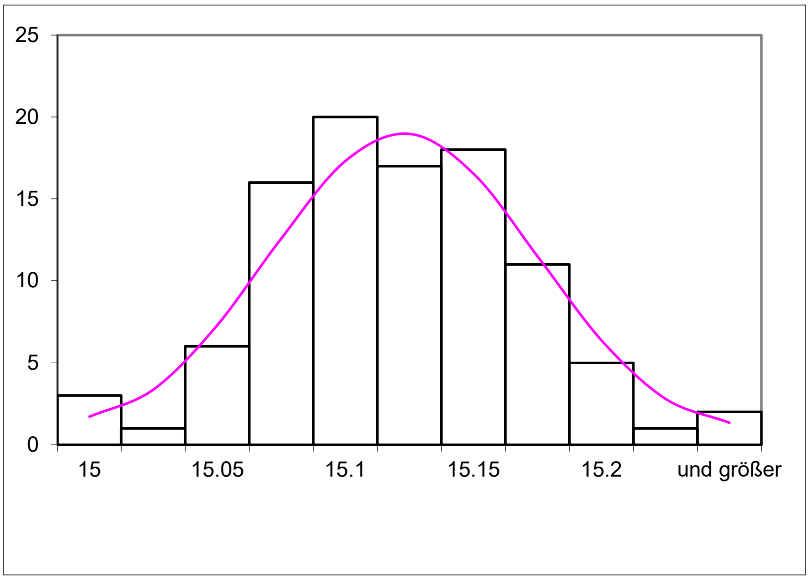
Eine angepasste Normalverteilung für die Küken-Daten

Bemerkung:
Dreht man die Stamm-Blatt-Darstellung um 90° nach links, dann ist die glockenförmige Verteilung bereits zu erkennen.

d)
Bei der Produktion von Massenartikeln kommen Abweichungen vom Sollwert vor. Sie ergeben sich aus dem Zusammenwirken einer grossen Zahl von schwachen Einflüssen, die voneinander unabhängig sind und zufällig auftreten.

Stichprobe von n=100 Widerständen (spezifiziert als 15 kOhm +/- 2% (bei 20°C))
Versuch im Schwerpunktfach Angewandte Mathematik und Physik 8.11.2005

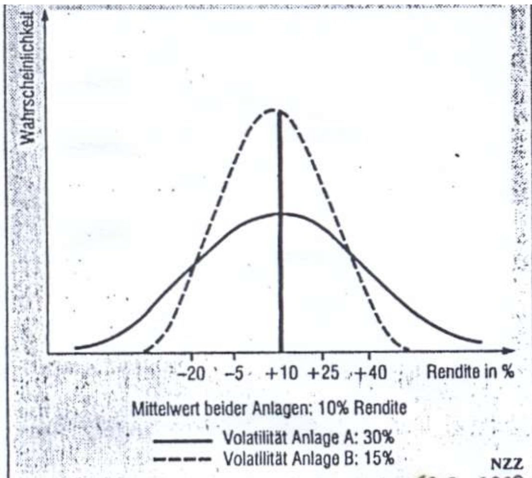
	Messdaten
Klasse	*Häufigkeit*
15	**3**
15.025	**1**
15.05	**6**
15.075	**16**
15.1	**20**
15.125	**17**
15.15	**18**
15.175	**11**
15.2	**5**
15.225	**1**
und größer	**2**
Summe	100



e)
Aus der Gynäkologie ist bekannt, dass die Dauer von gut betreuten Schwangerschaften angenähert normalverteilt ist.

f)

Renditen von Obligationen und Aktien (gemäss Theorie, und die Wirklichkeit?)

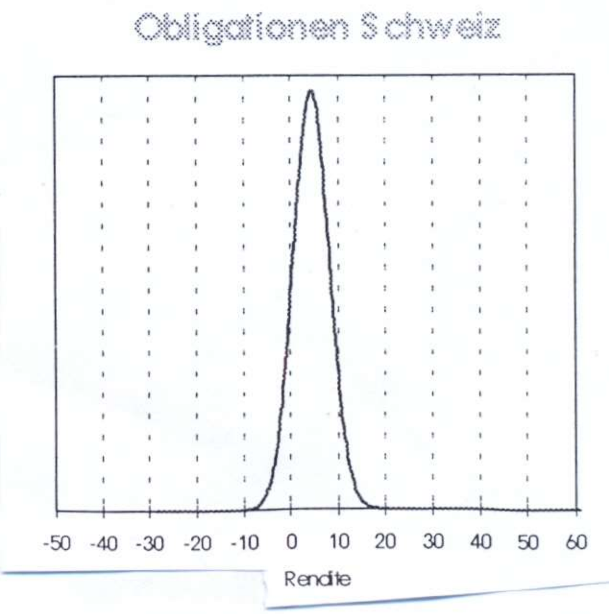


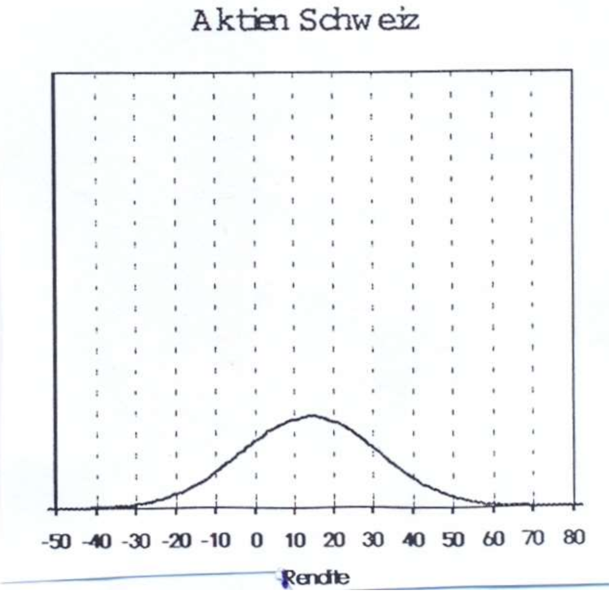
NZZ

16.2.1998

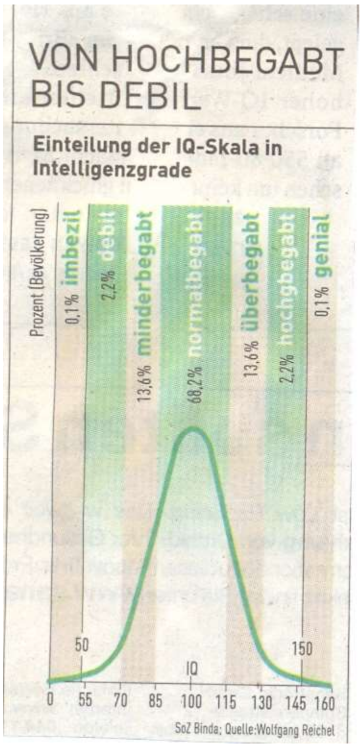
Volatilität als Risikomass

emy. Wenn vom Risiko einer Anlage die Rede ist, taucht oft der Begriff Volatilität auf. Grob ausgedrückt bezeichnet man einen Kurs als volatil, wenn sich die Notierungen im Zeitablauf stark verändern. Je volatiler ein Kursverlauf ist, desto stärker schwanken im Zeitablauf auch die mit der Anlage erwirtschafteten Gewinne und Verluste. Statistisch betrachtet bilden die Renditen über die Zeit annähernd eine Normalverteilung, schwanken also um einen Mittelwert. Dabei misst die Volatilität – oft auch mit dem griechischen Buchstaben σ (Sigma) bezeichnet – die Standardabweichungen der Renditen vom Mittelwert. Je grösser σ (in Prozent) ist, desto breiter sind die Renditen gestreut und desto flacher wird die Verteilung. Entsprechend höher ist denn auch das Risiko der Anlage.





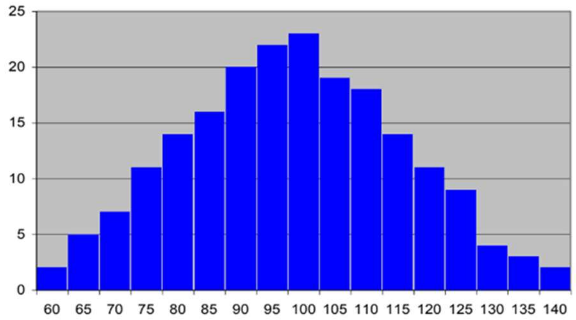
g)
Einteilung der IQ-Skala in Intelligenzgrade



❖ Beispiel: IQ-Werte von 200 Probanden

Klasse	Häufigkeit
<= 62	2
63-67	5
68-72	7
73-77	11
78-82	14
83-87	16
88-92	20
93-97	22
98-102	23
103-107	19
108-112	18
113-117	14
118-122	11
123-127	9
128-132	4
133-137	3
>= 138	2

$\bar{x} = 98.5$
$s = 17.1$



Diese Beispiele illustrieren den von Ljapunoff (1857-1918) formulierten sogenannten **Zentralen Grenzwertsatz,** der vereinfacht folgende Aussage macht:

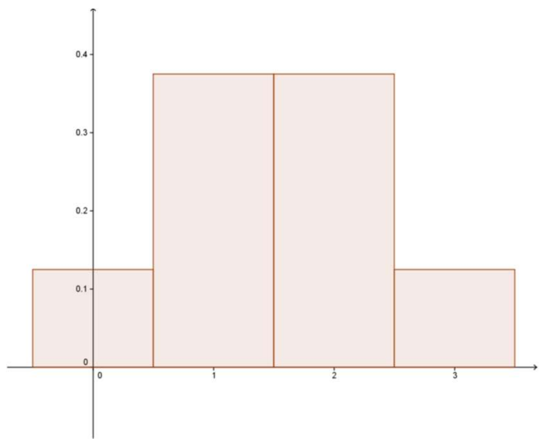
Zentraler Grenzwertsatz

Unter sehr schwachen Bedingungen ist die Summe von sehr vielen unabhängigen Zufallsvariablen angenähert normalverteilt. Diese Aussage gilt unabhängig von der Verteilung der einzelnen Zufallsvariablen.

Im Gegensatz zu den bisherigen diskreten Verteilungen handelt es sich bei der Normalverteilung um eine stetige (kontinuierliche) Verteilung. Eine stetige Zufallsvariable kann theoretisch jeden reellen Wert eines Intervalls annehmen (Beispiele: Längen von Werkstücken, Wartezeiten, Lebensdauer von Geräten). Im folgenden sind die beiden Typen von Zufallsvariablen gegenübergestellt. Beachte die Analogie zur Integralrechung (einerseits Untersumme, Obersumme andrerseits bestimmtes Integral).

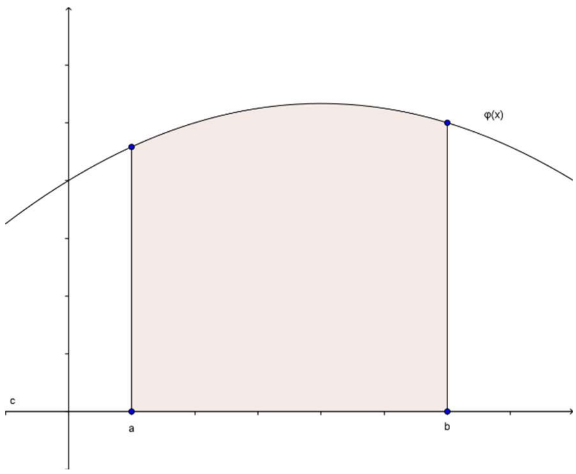
Diskrete Zufallsvariable X
Beispiel Binomialverteilung

$p(x_i)$



Stetige Zufallsvariable X
Beispiel Normalverteilung

$\varphi(x)$



X nimmt endlich viele Werte x_i mit den Wahrscheinlichkeiten $p(x_i) \geq 0$ an

An die Stelle der Wahrscheinlichkeiten tritt eine stetige Dichtefunktion φ mit $\varphi(x) \geq 0$ .Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert zwischen a und b annimmt, ist gegeben durch das bestimmte Integral

$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x)dx$ gegeben.

Normierung:
Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 1

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

Das Integral über die Dichte ist gleich 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1 \quad (*)$$

Erwartungswert als Summe:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$$

Erwartungswert als bestimmtes Integral

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x)dx$$

Varianz V(X) , Standardabweichung $\sigma \geq 0$

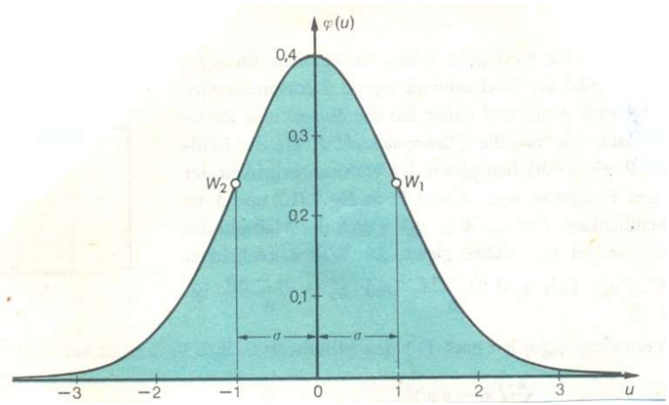
$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot \varphi(x)dx$$

Die in den Beispielen vorkommenden Verteilungen können auf die sogenannte Standardnormalverteilung zurückgeführt werden

In der Skizze ist die sogenannte Standardnormalverteilung mit der folgenden Dichte dargestellt:

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$



Der konstante Faktor ist so gewählt, dass die Dichte die Eigenschaft (*) hat. Aus Symmetriegründen ist offensichtlich $\mu = 0$. Mit partieller Integration ergibt sich die Varianz bzw. Standardabweichung zu $\sigma = 1$. Der Parameter $\mu = 0$ legt die Lage des Hochpunkts fest. Bereits früher wurde gezeigt, dass der Streuungsparameter $\sigma = 1$ die beiden Wendestellen bei +1 und - 1 bestimmt

Die Normalverteilung hat den amerikanischen Statistiker Youden zu folgendem typografischen Loblied inspiriert:

THE
NORMAL
LAW OF ERROR
STANDS OUT IN THE
EXPERIENCE OF MANKIND
AS ONE OF THE BROADEST
GENERALIZATIONS OF NATURAL
PHILOSOPHY ✧ IT SERVES AS THE
GUIDING INSTRUMENT IN RESEARCHES
IN THE PHYSICAL AND SOCIAL SCIENCES AND
IN MEDICINE AGRICULTURE AND ENGINEERING ✧
IT IS AN INDISPENCABLE TOOL FOR THE ANALYSIS AND THE
INTERPRETATION OF THE BASIC DATA OBTAINED BY OBSERVATION AND EXPERIMENT

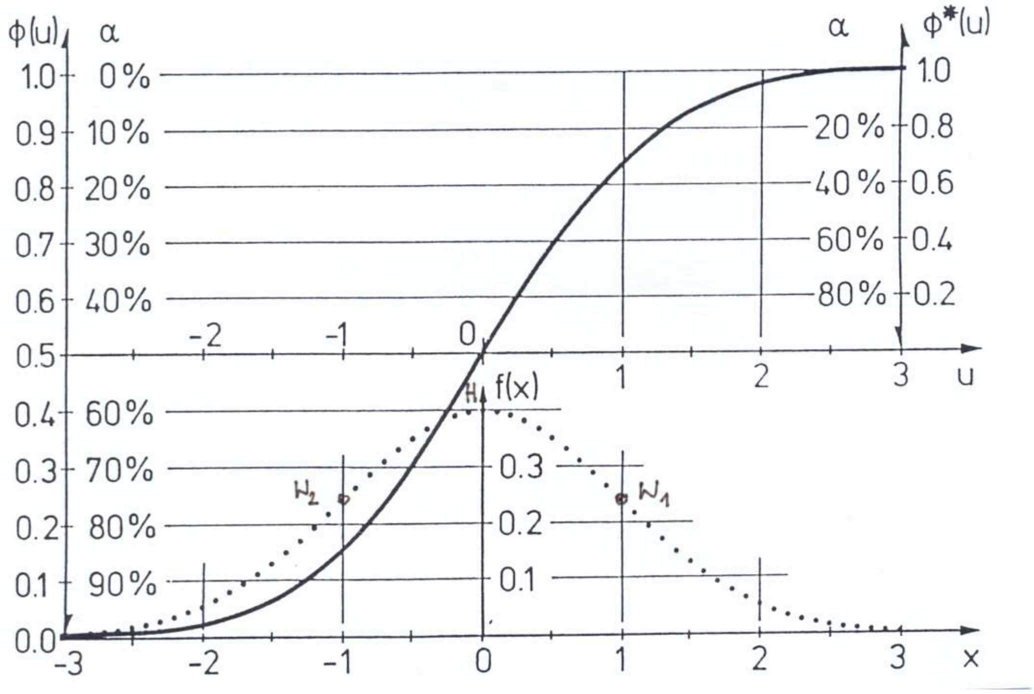
Youden

Das Integral kann nicht nach dem Hauptsatz berechnet werden, da zum Integranden keine elementare Stammfunktion existiert. Man ist deshalb auf numerische Verfahren angewiesen. Im folgenden wird erläutert, dass die Tabelle zu $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ für alle Parameterwerte ausreicht.

Tabelliert ist:

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$ Standardnormalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

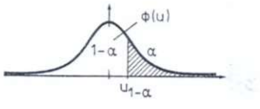
$\Phi(u)$ entspricht dem Inhalt des von der Glockenkurve und der x-Achse im Intervall von $-\infty$ bis $u > 0$ eingeschlossenen Flächenstücks. Wegen $\Phi(\infty) = 1$ können die Werte von $\Phi(u)$ als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden, dass die standardnormalverteilte Zufallsvariable Z einen Wert zwischen $-\infty$ und $u > 0$ annimmt. Der abgebildete Graph von $\Phi(u)$ ermöglicht eine Abschätzung des Tabellenwerts zur Kontrolle.



Heute macht schon der Taschenrechner oder eine Statistiksoftware (oder auch Excel) das Lesen von Tabellen und die Interpolation weitgehend überflüssig.
Die folgenden Ableseübungen können deshalb mit diesen Hilfsmitteln gelöst oder überlesen werden.

Tabelle der Normalverteilung

Verteilungsfunktion: $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-z^2/2}\,dz\,, \qquad u = \frac{x-\mu}{\sigma}$

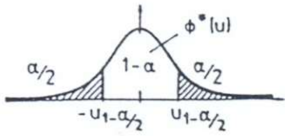


u		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5	000	040	080	120	160	199	239	279	319	359
0.1		398	438	478	517	557	596	636	675	714	753
0.2		793	832	871	910	948	987	*026	*064	*103	*141
0.3	0.6	179	217	255	293	331	368	406	443	480	517
0.4		554	591	628	664	700	736	772	808	844	879
0.5		915	950	985	*019	*054	*088	*123	*157	*190	*224
0.6	0.7	257	291	324	357	389	422	454	486	517	549
0.7		580	611	642	673	704	734	764	794	823	852
0.8		881	910	939	967	995	*023	*051	*078	*106	*133
0.9	0.8	159	186	212	238	264	289	315	340	365	389
1.0		413	438	461	485	508	531	554	577	599	621
1.1		643	665	686	708	729	749	770	790	810	830
1.2		849	869	888	907	925	944	962	980	997	*015
1.3	0.9	032	049	066	082	099	115	131	147	162	177
1.4		192	207	222	236	251	265	279	292	306	319
1.5		332	345	357	370	382	394	406	418	429	441
1.6		452	463	474	484	495	505	515	525	535	545
1.7		554	564	573	582	591	599	608	616	625	633
1.8		641	649	656	664	671	678	686	693	699	706
1.9		713	719	726	732	738	744	750	756	761	767
2.0	0.97	725	778	831	882	932	982	*030	*077	*124	*169
2.1	0.98	214	257	300	341	382	422	461	500	537	574
2.2		610	645	679	713	745	778	809	840	870	899
2.3		928	956	983	*010	*036	*061	*086	*111	*134	*158
2.4	0.99	180	202	224	245	266	286	305	324	343	361
2.5		379	396	413	430	446	461	477	492	506	520
2.6		534	547	560	573	585	598	609	621	632	643
2.7		653	664	674	683	693	702	711	720	728	736
2.8		744	752	760	767	774	781	788	795	801	807
2.9		813	819	825	831	836	841	846	851	856	861
3.0	0.998	650	694	736	777	817	856	893	930	965	999
3.1	0.999	032	065	096	126	155	184	211	238	264	289
3.2		313	336	359	381	402	423	443	462	481	499
3.3		517	534	550	566	581	596	610	624	638	651
3.4		663	675	687	698	709	720	730	740	749	758
3.5		767	776	784	792	800	807	815	822	828	835
3.6		841	847	853	858	864	869	874	879	883	888
3.7		892	896	900	904	908	912	915	918	922	925
3.8		928	931	933	936	938	941	943	946	948	950
3.9		952	954	956	958	959	961	963	964	966	967

$\Phi(1.96) \approx 0.975, \qquad \Phi(-1.96) = 1 - \Phi(1.96) \approx 0.025$

$\Phi^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^{+u} e^{-z^2/2}\,dz$

für $u \geqq 0$ gilt $\Phi^*(u) = 2\,\Phi(u) - 1$

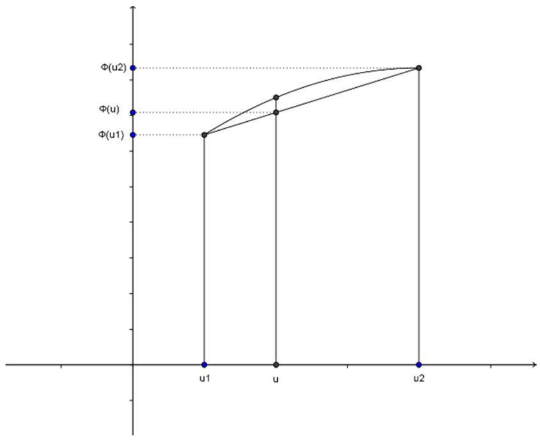


Einige Ableseübungen:

1. u gegeben, Φ(u) gesucht

u	Φ(u)
0.6	0.7257
0.61	0.7291
0.84	0.7995
0.85	0.8023

Beachte die Bedeutung des * !



u	Φ(u)
1.160	0.8770
1.163	0.8770 + 0.0006 = **0.8776**
1.170	0.8790

Werden die Veränderungen auf die letzte Stelle bezogen dann gilt:
Nimmt u um 10 zu, so wächst Φ(u) um 20.
Nimmt u um 1 zu, so wächst Φ(u) um 2.
Nimmt u um 3 zu, so wächst Φ(u) um $3 \cdot 2 = 6$ zu.

u	Φ(u)
1.100	0.8643
1.104	0.8643 + 0.0009 = **0.8652**
1.110	0.8665

Nimmt u um 4 zu, so wächst Φ(u) um $4 \cdot 2.2 \approx 9$ zu.

2. Φ(u) gegeben, u gesucht

Φ(u)	u
0.9394	1.55

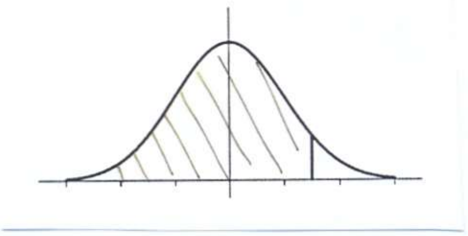
0.9505	1.650
0.9510	1.650 + 0.005 = **1.655**
0.9515	1.660

Nimmt Φ(u) um 10 zu, so wächst u um 10
Nimmt Φ(u) um 5 zu, so wächst u um 5

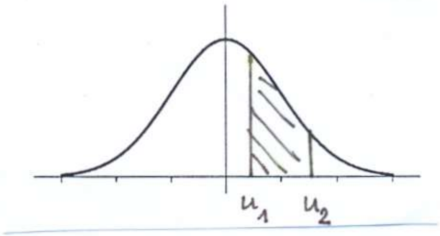
Weitere Beispiele:

Φ(u)	u
0.9460	**1.607**
0.7969	**0.8307**
0.8778	**1.164**

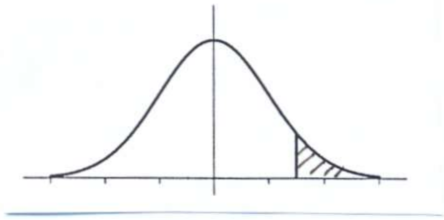
In den Anwendungen treten vor allem die die folgenden Probleme auf:



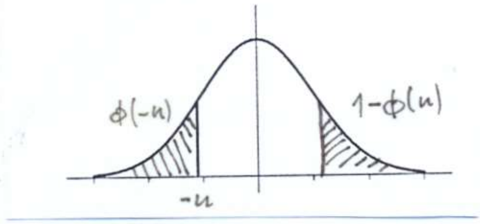
$p(Z \leq u) = \Phi(u) \quad u > 0$



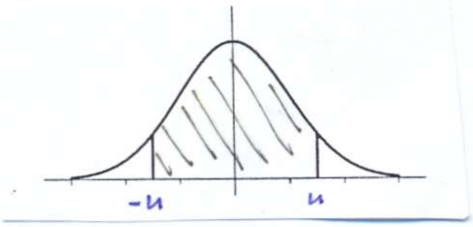
$p(u_1 \leq Z \leq u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$



$p(Z \geq u) = 1 - \Phi(u)$



$p(Z \leq -u) = \Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$



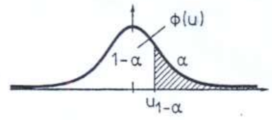
$p(-u \leq Z \leq u) = \Phi(u) - \Phi(-u) = 2\Phi(u) - 1 = \Phi^*(u)$

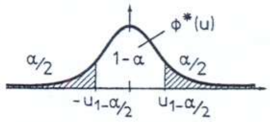
In der Statistik spielen die folgenden "Alarmwerte" eine wichtige Rolle :

$\Phi(u) = 0.95$ **$u = 1.645$** ($\rightarrow$ einseitiger Test)
$\Phi(u) = 0.975$ **$u = 1.96$** ($\rightarrow$ zweiseitiger Test)

Hilfstafel zum Testen

einseitig	$u_{1-\alpha}$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090
Signifikanzniveau α		10%	5%	2.5%	1%	0.5%	0.1%
	$1-\alpha$	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.9%
zweiseitig	$u_{1-\alpha/2}$	1.645	1.960	2.241	2.576	2.807	3.291

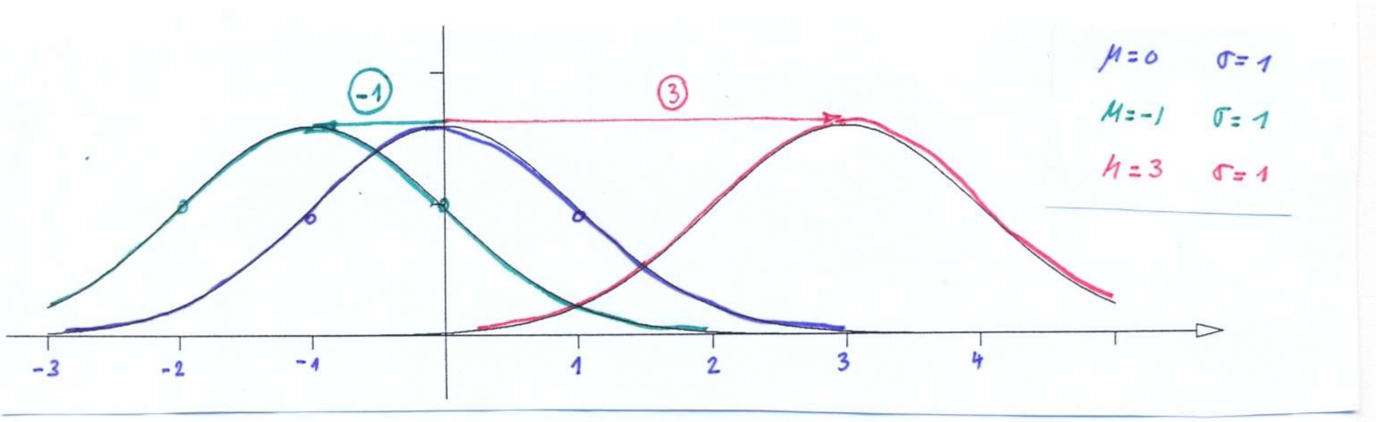


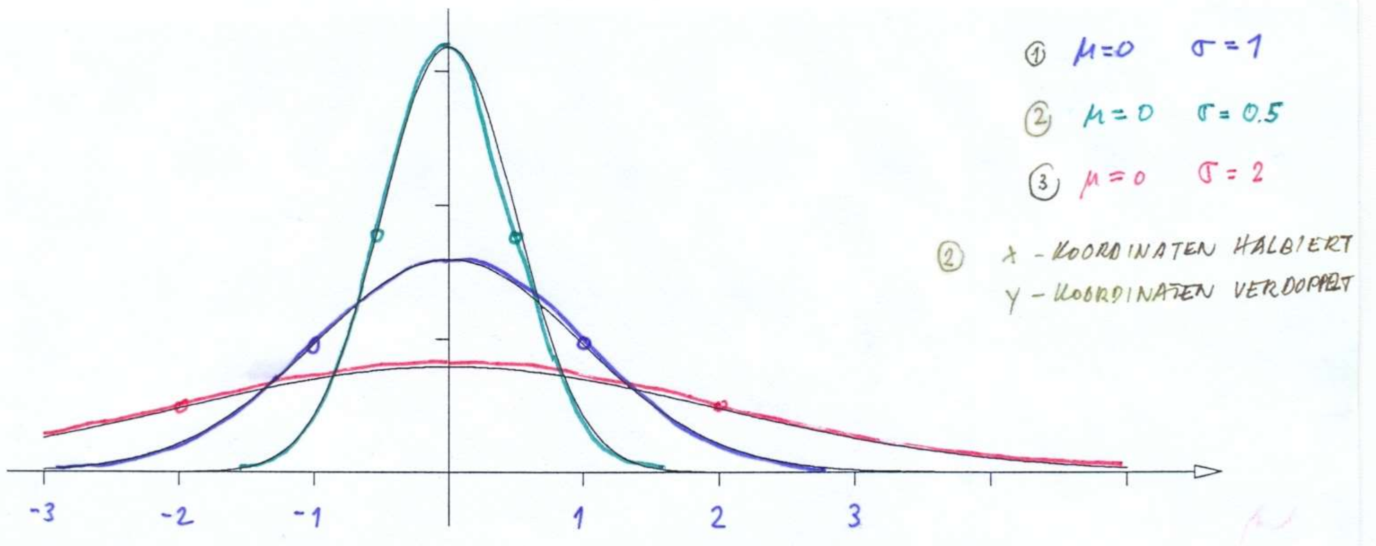


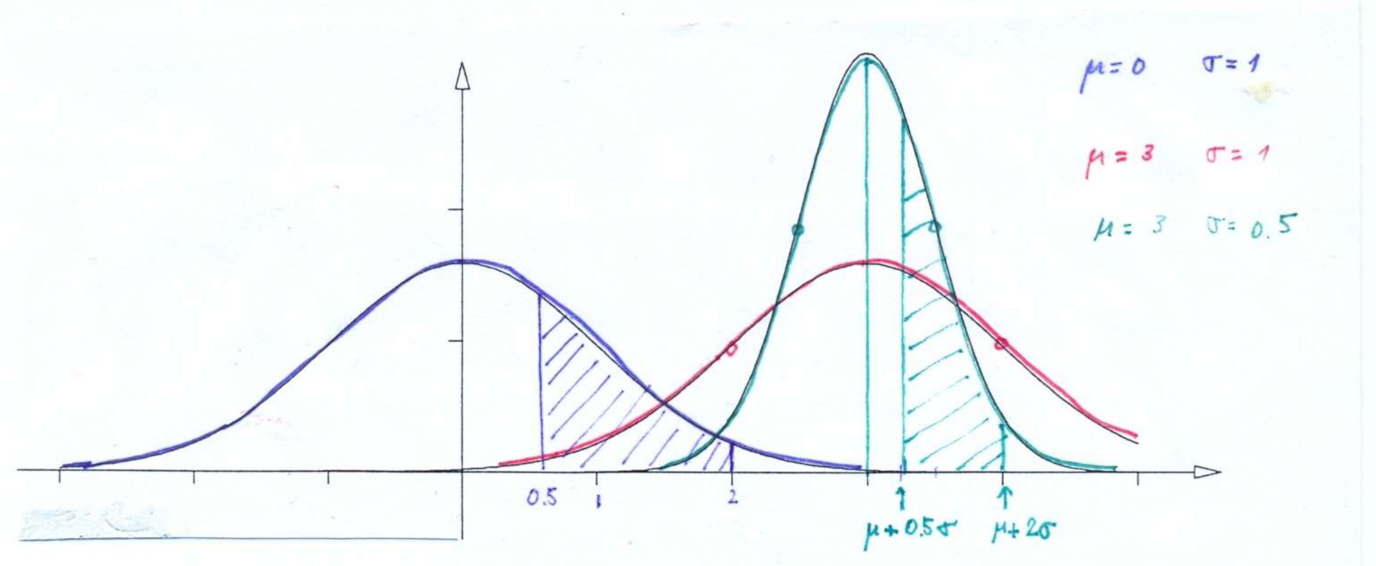
Der allgemeine Fall einer (μ,σ) - normalverteilten Zufallsvariablen X mit der Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

kann auf den Spezialfall der Standardnormalverteilung zurückgeführt werden. Zur Vorbereitung untersuchen wir den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Gausskurven.





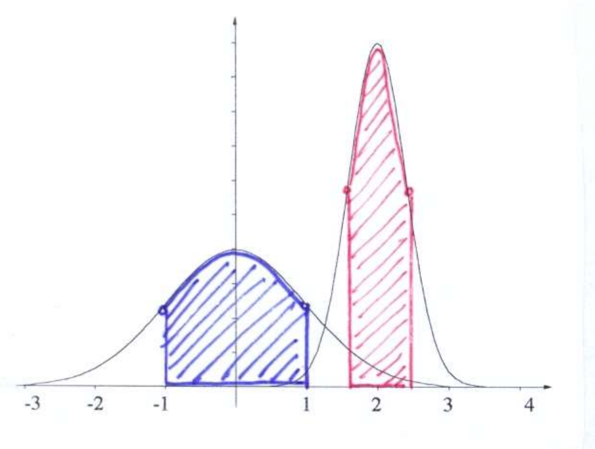


Die Beispiele zeigen, dass der Erwartungswert μ die Lage der Symmetrieachse verändert, die Standardabweichung σ die Lage der Wendepunkte. Wird σ verkleinert, so ergibt sich eine schlankere Kurve mit einem grossen Maximum, wird umgekehrt σ vergrössert, so ergibt sich eine flachere Gausskurve mit einem kleinen Maximum.
Das blau schraffierte Flächenstück kann durch eine flächentreue Abbildung in das rot schraffierte Flächenstück der Standardnormalverteilung übergeführt werden.

Wesentlich ist nun:
Misst man die Lage der oberen und unteren Grenze nicht absolut, sondern in Einheiten von σ, dann sind die zugehörigen Flächenstücke immer gleich gross (unabhängig von der speziellen Wahl von μ und σ). Die zugehörigen Inhalte können deshalb mit der Tabelle der Standardnormalverteilung bestimmt werden.

Skizze: $\mu = 0$, $\sigma = 1$ bzw. $\mu = 2$, $\sigma = 0.4$

Geometrisch:
Das rot gefärbte Gebiet kann durch eine flächentreue Abbildung in das blau gefärbte Gebiet unter der Standardnormalverteilung übergeführt werden.



Beweis: (Substitution 1.Art).

$$p(a \le X \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_a^b e^{-\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\frac{1}{\sigma}dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Damit gilt für die

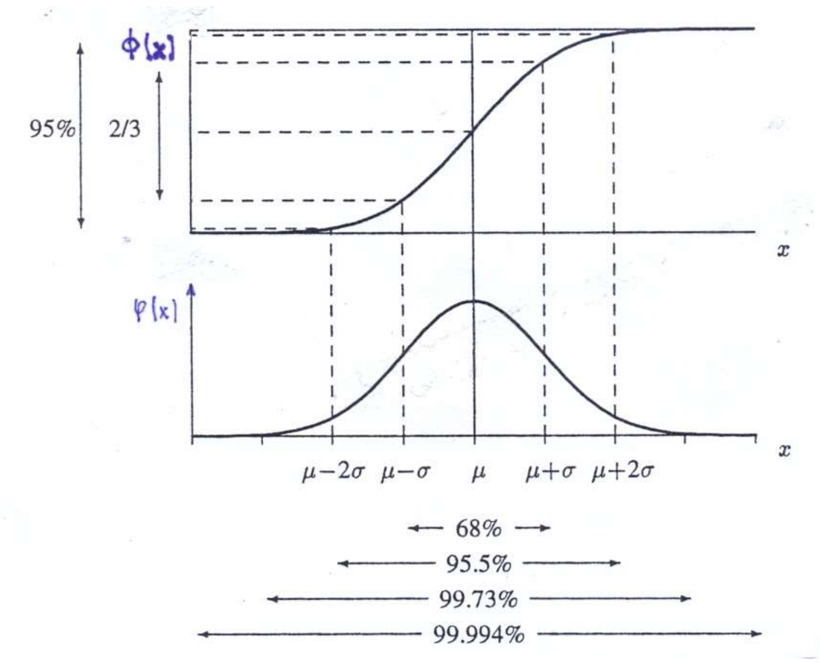
Wahrscheinlichkeit, dass die normalverteilte Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ einen Wert zwischen a und b einnimmt:

$$p(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Merkregel: Es sind die Abweichungen vom Erwartungswert in Einheiten von σ zu messen.

In der folgenden Grafik sind einige häufig verwendete Werte zusammengestellt:

Intervall	Wahrscheinlichkeit	
$[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$	ca $^2/_3$	$\Phi^*(1) \approx 0.6826$
$[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$	ca 95%	$\Phi^*(2) \approx 0.9545$
$[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$	ca. 100%	$\Phi^*(3) \approx 0.9973$



Aufgabe:
Der systolische Blutdruck X gesunder Menschen ist etwa normalverteilt mit dem Erwartungswert 120 und der Standardabweichung 10. Berechne die Wahrscheinlichkeit,
a)
dass der Blutdruck höchstens 105 beträgt

$$P(X \leq 105) = \Phi\left(\frac{105-120}{10}\right) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668$$

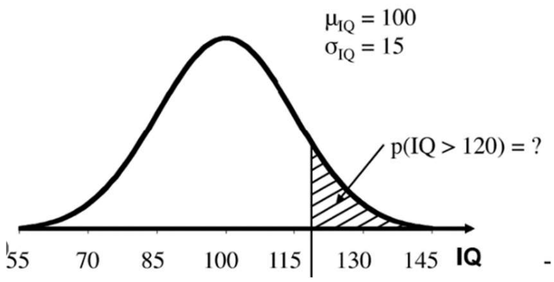
b)
dass der Blutdruck zwischen 110 und 130 liegt

$$P(110 \leq X \leq 130) = \Phi^*\left(\frac{130-120}{10}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2 \cdot \Phi(1) - 1 = 0.6826$$

c)
Ist ein Blutdruck von 135 schon alarmierend, d.h. liegt er ausserhalb des Bereichs $\mu \pm 2\sigma$?
Der Bereich $\mu \pm 2\sigma$ entspricht dem Intervall [100, 140]. Da 135 in diesem Intervall liegt, ist ein solcher Blutdruck nicht alarmierend

Aufgabe:
Die IQ-Skala geht von einem Erwartungswert $\mu_{IQ} = 100$ und von Standardabweichung $\sigma_{IQ} = 15$ aus.
a)
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer normalverteilten Stichprobe
eine Probandin einen IQ grösser als 120 hat

Der unteren Grenze 120 entspricht der standardisierte Wert z der Standardnormalverteilung

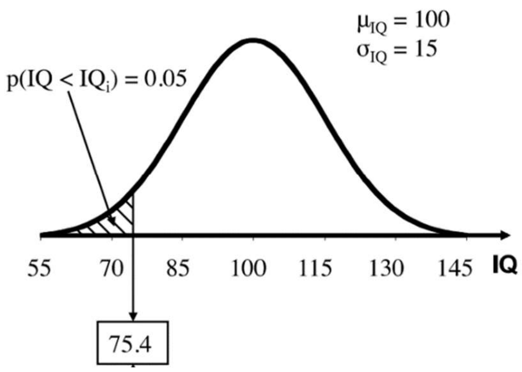


$z = \frac{IQ-\mu_{IQ}}{\sigma_{IQ}} = \frac{120-100}{15} = 1.333$=

Damit erhält man
$p(IQ > 120) = 1 - \Phi(1.333) = 0.092$

Lösung in R:
\- pnorm(q=120, mean=100, ..sd = 15, lower.tail = F)

b)
Unter welchem IQ liegen 5% der IQ-Werte?



Gesucht ist zunächst der standardisierte Wert z für den gilt:
$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) = 0.05$

Aus der Tabelle erhält man den Wert z = - 1,64.
Wegen $z = \frac{IQ-\mu_{IQ}}{\sigma_{IQ}}$ gilt:
$IQ = \mu_{IQ} - z \cdot \sigma_{IQ} = 100 - 1.64 \cdot 15 = 75.4$

Lösung in R:

qnorm(q=120, mean=100, ..sd = 15, lower.tail = T)

Aufgabe:
X sei die (normalverteilte) Plattendicke eines Werkstücks in mm mit dem Erwartungswert
μ = 10 mm und der Standardabweichung σ = 0.02 mm.
Wieviel Ausschuss ist in den folgenden Fällen zu erwarten:

a) wenn die minimale Dicke mindestens 9.97 mm betragen soll
Abweichung absolut. -0.03 in σ-Einheiten. -1.5
$p(X < 9.97) = p(Z < -1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 – 0.9332 = 6.7\%$ Ausschuss

b) wenn die Plattendicke maximal 0.03 mm vom Erwartungswert abweichen soll
Abweichung absolut. +/-0.03 in σ-Einheiten. +/-1.5
$1 - p(9.97 < X < 10.03) = 1- \Phi^*(1.5) = 13.4\%$ Ausschuss

c) Wie sind die Toleranzgrenzen [10 – c,10 + c] zu wählen, damit höchstens 95% Ausschuss anfällt?
$\Phi^*(u) = 0.95 \rightarrow \Phi(u) = 0.975 \rightarrow u = 1.96 \rightarrow c = u\sigma = 1.96\ 0.02 \approx 0.04$
Grenzen [9.96,10.04]

Das Ergebnis in c) kann auch folgendermassen formuliert werden:
Das Intervall [9.96,10.04] ist ein 95%-Vertrauensintervall für die Plattendicke.

Summenverteilung

Der Grenzwertsatz ermöglicht es eine Aussage über die Summe von unabhängigen Zufallsvariablen von vergleichbarer Größenordnung zu machen.
Für den Erwartungswert bzw. der Varianz einer Summe von n unabhängigen Zufallsvariablen gilt:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Angenommen die X_i sind annähernd die gleiche (NV-) Verteilung mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2
Dann gilt für genügend grosse n nach dem zentralen Grenzwertsatz

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\mu \ (1)$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\sigma^2 (2)$$

Als Beispiel:
Der Lift in einem Gebäude sei zugelassen für 12 Personen bzw. eine Maximalbelastung von 1000 kg . Es wird angenommen, dass die einzelnen Gewichte annähernd normalverteilt sind.
Das Durchschnittsgewicht der Personen sei μ = 70 kg und die Standardabweichung σ = 15 kg.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass der voll besetzte Lift die Maximallast überschreitet und der Lift stecken bleibt gilt dann:

$$p\left(\sum_{i=1}^{12} X_i > 1000\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1000 - 12 \cdot 70}{15 \cdot \sqrt{12}}\right) = 0.001$$

Aus (1) und (2) erhält man für den Erwartungswert des Mittelwerts:

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \mu \qquad 1.\, theoretisches\ Moment\ (3)$$

und für die Varianz wegen $V(b \cdot X)) = b^2 \cdot V(X)$

Standardfehler des Mittelwerts in der Grundgesamtheit (Population)

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Das Ergebnis bedeutet: Wird der Stichprobenumfang so halbiert sich die Standardabweichung
Entsprechend nennt man

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad 2.\, theoretisches\ Moment\ (4)$$

Wegen $V(x) = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2$
kann die Varianz aus dem 1. und 2. Moment berechnet werden

Beispiel

Die Eierproduktion von Hennen sei normalverteilt mir dem dem Mittelwert $\mu = 310$ (Produktion einer Henne pro Jahr) und der Standardabweichung $\sigma = 40$.

Eine Bäuerin kauft 50 Hennen, die sie zufällig auswählt.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die **durchschnittliche Leistung** dieser Hennen grösser als 320 ist**?**

$$p(\bar{X} > 320) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{320 - 310}{40} \cdot \sqrt{50}\right) = 1 - 0.9616 \approx 3.8\%$$

Aufgabe:
Die Abfüllmaschine einer Firma stellt Joghurt her, deren Gewicht normalverteilt sei mit $\mu = 500.00\ g$ und $\sigma = 2.00\ g$. Eine Käuferin drei zufällig ausgewählte Joghurt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert grösser als 499.00 g beträgt?

$$p(\bar{X} > 499.00) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{499.00-5\quad.00}{2.00} \cdot \sqrt{3}\right) = 1 - 0.866 \approx 0.134 \approx 13.4\%$$

Weitere Stetige Verteilungen werden in den folgenden Kapiteln vorkommen (Student-t-Verteilung, Chiquadratverteilung, F-Verteilung,…)