9. Diskrete Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert, Varianz

Bei Zufallsversuchen interessieren oft nicht die Ergebnisse selbst, sondern Zahlen, die den möglichen Ergebnissen des Zufallsversuchs zugeordnet sind. Diese Zahlen können als Gewinne bei einem Glücksspiel aufgefasst werden.

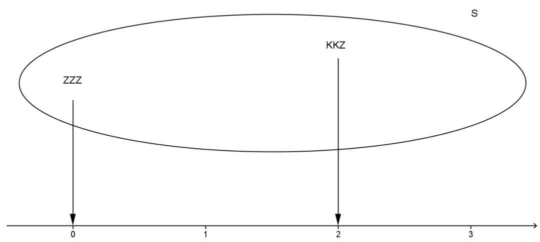
B:
Eine Münze wird dreimal geworfen. Das Werfen von Kopf sei ein Erfolg. Die Anzahl der Erfolge X sei der Gewinn.

Durchführung eines Zufallsexperiments:
Jede Schülerin wirft eine Münze dreimal und notiert sich, wie oft Kopf erscheint. Sie wiederholt diesen Zufallsversuch zehnmal.
Die folgenden Zahlen wurden in einem Klassenexperiment (15.12.2000) mit insgesamt $n = 179$ Wurfserien ermittelt:

$X = x_i$	0	1	2	3
n_i	19	64	68	28
$h(X = x_i)$	$^{19}/_{179}$	$^{64}/_{179}$	$^{68}/_{179}$	$^{28}/_{179}$

empirischer Mittelwert:
$\overline{x} = \frac{19}{179}\cdot 0 + \frac{64}{179}\cdot 1 + \frac{68}{179}\cdot 2 + \frac{28}{179}\cdot 3 = 1.587$
empirische Standarabweichung:
$$s^2 = \frac{19\cdot(0-\overline{x})^2 + 64\cdot(1-\overline{x})^2 + 68\cdot(2-\overline{x})^2 + 28\cdot(3-\overline{x})^2}{179-1} = 0.772$$

Modell:
Stichprobenraum S = {KKK, KKZ, ... , ZZZ}
Die Zufallsvariable X ordnet z. B. KKZ $\to$ 2 zu.



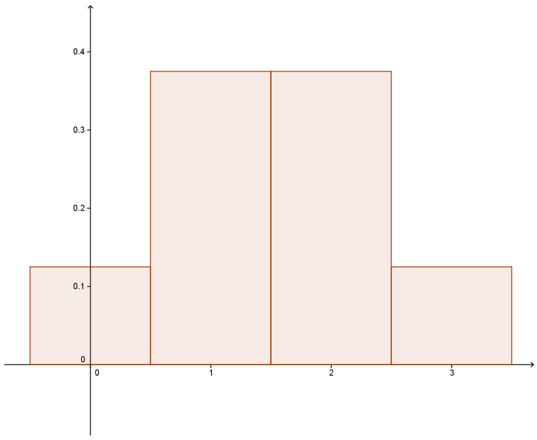
Def.
Eine **diskrete Zufallsvariable** X ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsversuchs mit dem endlichen Stichprobenraum S eindeutig eine reelle Zahl zu. $X: e_i \in S \to x_i \in R$

Bem.
Zufallsvariable sind also Funktionen. Die Funktionswerte können als Gewinne bei einem Glücksspiel aufgefasst werden. Zufallsvariable werden mit Grossbuchstaben z.B. X, die Werte der Zufallsvariable mit $x_1, x_2, \dots x_i$ bezeichnet. Wir betrachten zunächst den Fall, dass X nur endlich viele Werte annehmen kann. In diesem Fall heisst X diskrete Zufallsvariable.

Die Werte der Zufallsvariablen treten mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten auf. Die zugehörige Funktion heisst **Wahrscheinlichkeitsverteilung**. Sie ordnet den Werten x_i der Zufallsvariablen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p(x_i)$ zu, wobei $\Sigma\, p(x_i) = 1$ gilt.

Münzenbeispiel:
Die Zufallsvariable X „Anzahl Erfolge“ kann die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Binomialverteilung::

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$^1/_8$	$^3/_8$	$^3/_8$	$^1/_8$



Werfen eines L-Würfels:
Die Zufallsvariable X „Augenzahl“ kann die Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit den Wahrscheinlichkeiten $p(x_i) = {}^1/_6$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Gleichverteilung.

Werfen von zwei Würfeln:
Die Zufallsvariable X „Augensumme“ kann die Werte 2, 3, 4, 5, ... , 12 mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten annehmen:

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Mit der Idee der erzeugenden Polynome können die absoluten Häufigkeiten für die Augensumme einfach bestimmt werden.
Dazu ermittelt man die Koeffizienten des Polynoms $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$
Als Koeffizient von x^8 z.B. ergibt sich 5, womit die Augensumme 8 genau fünfmal auftreten kann, nämlich bei den Ergebnissen (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), 6,2).

Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Analog zu den empirischen Häufigkeitsverteilungen charakterisieren wir Wahrscheinlichkeits-verteilungen durch Masszahlen, sogenannte Parameter nämlich
der Erwartungswert als Gegenstück zum empirischen Mittelwert und
die Varianz bzw. Standardabweichung als Gegenstück zur empirischen Varianz bzw. Standardabweichung.

Dabei treten im Modell an die Stelle der relativen Häufigkeiten $\frac{n_i}{n}$ die Wahrscheinlich-keiten $p(x_i)$.

$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$ **Erwartungswert** einer Zufallsvariablen

Bem.
Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen kann als mittlerer Gewinn auf lange Sicht beim Glückspiel aufgefasst werden.

Münzenbeispiel:
$\mu = E(X) = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3}{2}$

Der Erwartungswert allein beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung nur unvollständig. Zwei Verteilungen mit gleichem Erwartungswert können ganz verschieden um den Erwar-tungswert streuen. Als Mass für die mittlere Abweichung der Werte der Zufallsvariablen vom Erwartungswert definieren wir die Varianz V(X) bzw. die Standardabweichung σ.

$V(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot (x_i - \mu)^2$ V(X) **Varianz,** σ heisst **Standardabweichung**.

$\sigma^2 = V(x) \quad \sigma \geq 0$

Bem.
Die Abweichungsquadrate vom Erwartungswert werden mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtet.

Münzenbeispiel:
$\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{8} \cdot \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \quad \sigma = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0.866$

Uebungsaufgabe:
Berechne für die Zufallsvariable X den Erwartungswert und die Varianz:

a)

x_i	2	3	11
$p(x_i)$	$1/3$	½	$1/6$

b)

x_i	6	8	9	10
$p(x_i)$	0.4	0.1	0.2	0.3

Lösung: a) E(X) = 4, V(X) = 10 b) E(X) = 8, V(X) = 3

Beachte die folgende Gegenüberstellung zwischen den empirischen und theoretischen Werten:

empirisch:	rel. Häufigkeit $h(x_i)$	emp. Mittelwert $\overline{x}$	empirische Varianz s^2
Modell:	Wahrscheinlichkeit $p(x_i)$	Erwartungswert $E(X) = \mu$	Varianz $V(X) = \sigma^2$

Im folgenden Beispiel werden die in einem Klassenversuch ermittelten Daten mit den entsprechenden Werten des Modells verglichen. Die angewandte Statistik lehrt, wie man Schätzwerte für die i.a. unbekannten Parameter z.B. Erwartungswert, Varianz schätzen kann.

Zufallsexperiment Werfen von 3 Münzen Apr 97

Anzahl Kopf	abs. H ni	re. H. hi		Wahrsch. p(xi)
0	27	0.129		0.125
1	73	0.348		0.375
2	83	0.395		0.375
3	27	0.129		0.125
Summe	210	1.000		1.000
emp. Mittelwert		**1.524**	**Erwart.wert**	**1.500**
Varianz	empirisch	**0.767**	Modell	**0.750**
Stand.abw.	empirisch	**0.876**		**0.866**

Die Bedeutung von Erwartungswert und Standardabweichung liegt darin, dass für viele Wahrscheinlichkeitsverteilungen (insbesondere für die später erwähnte Normalverteilung) gilt:

$$P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = 66.7\%$$

$$P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) = 94.4\%$$

d.h. in den angegebenen Intervallen liegen etwa $^2/_3$ bzw. 95% aller Werte der Zufallsvariablen. 3σ-Abweichungen vom Erwartungswert kommen praktisch nicht vor. Diese Aussage gilt nicht nur im Modell sondern in vielen Fällen auch für die in der angewandten Statistik erfassten Daten.

Für Erwartungswert und Standardabweichung gelten die folgenden Gesetze:

(1) $E\left(k\cdot X\right)=k\cdot E\left(X\right)$ k $\in$ R

(2) $E\left(X+Y\right)=E\left(X\right)+E\left(Y\right)$ und als Spezialfall: $E\left(X+k\right)=E\left(X\right)+k$ k $\in$ R

(3) $V\left(k\cdot X\right)=k^2\cdot V\left(X\right)$ $\quad V\left(X+k\right)=V\left(X\right)+k$

(4) $V(X\pm Y)=V(X)\pm V(Y)$

Hingegen gilt i.a.:
$E\left(X\cdot Y\right)\neq E\left(X\right)\cdot E\left(Y\right)$ bzw. $V\left(X\cdot Y\right)\neq V\left(X\right)\cdot V\left(Y\right)$

Die Gesetze (1) und (2) bedeuten, dass der Erwartungswert ein lineares Funktional ist (ein Funktional ordnet einer Funktion eine reelle Zahl zu). Diese Gesetze spielen beim Beweis des folgenden, hin und wieder hilfreichen Satzes eine Rolle

Satz: $V(X)=\sigma^2=E(X^2)-\mu^2$ (5)

Illustration am Münzenbeispiel

X:	0	1	2	2
X^2:	0	1	4	9
$p(x_i)$	$^1/_8$	$^3/_8$	$^3/_8$	$^1/_8$

$$E(X^2)=\tfrac{1}{8}\cdot 0^2+\tfrac{1}{8}\cdot 1^2+\tfrac{1}{8}\cdot 2^2+\tfrac{1}{8}\cdot 3^2=3$$
$$V(X)=E(X^2)-\mu^2=3-\tfrac{9}{4}=\tfrac{3}{4}$$

Beweis von (5):

$$\sigma^2=E\left((X-\mu)^2\right)=E\left(X^2-2\mu X+\mu^2\right)\overset{1,2}{=}E\left(X^2\right)-2\mu\, E\left(X\right)+E\left(\mu^2\right)$$
$$=E\left(X^2\right)-2\mu^2+\mu^2=E\left(X^2\right)-\mu^2$$

Spezielle Verteilungen:

a) Gleichverteilung

Idealer Würfel:

$$\mu = E(X) = \tfrac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6) = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot 6\cdot 7 = \tfrac{7}{2}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \tfrac{1}{6}\cdot\left(\left(1-\tfrac{7}{2}\right)^2+\left(2-\tfrac{7}{2}\right)^2+\ldots+\left(6-\tfrac{7}{2}\right)\right) = \tfrac{35}{12} \qquad \sigma = \sqrt{\tfrac{35}{12}} \approx 1.72$$

allg.
Im Falle der Gleichverteilung sind n gleichwahrscheinliche Ergebnisse möglich. Es gilt dann:
$\mu = \tfrac{1}{2}\cdot(n+1)$ und $\sigma^2 = \tfrac{1}{12}\cdot\left(n^2-1\right)$

Beweis: Uebungsaufgabe

Beispiel: Augensumme zweier Würfel (Backgammon?)

Erwartungswert und Standardabweichung von X:

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\mu = 7$$

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{36}(2-7)^2 + \tfrac{2}{36}(3-7)^2 + \ldots + \tfrac{2}{36}\cdot(11-7)^2 + \tfrac{1}{36}(12-7)^2 = \tfrac{210}{36} = \tfrac{35}{6} \approx 5.83$$

Die aufwändige Berechnung von Erwartungswert und Standardabweichung vereinfacht sich mit Satz (5). Sie kann aber mit den Eigenschaften (1) bis (4) auf den Fall des einfachen Wurfs zurückgeführt werden:
Sei X die Augenzahl des ersten Würfels und Y die des zweiten.
Dann gilt
wegen (2): $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \tfrac{7}{2} + \tfrac{7}{2} = 7$
wegen (4): $V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \tfrac{35}{12} + \tfrac{35}{12} = \tfrac{35}{6}$

b) Binomialverteilung
Für eine **binomialverteilte Zufallsvariable** X können Erwartungswert und Standardabweichung direkt angegeben werden:

(6) E(X) = np (7) V(X) = npq **Binomialverteilung**

Das Ergebnis für den Erwartungswert ist plausibel: Jeder der n Teilversuche hat die Erfolgswahrscheinlichkeit p; beim Gesamtversuch sind daher im Mittel np Erfolge zu erwarten.

Beispiel:
Da die zum Münzenexperiment gehörige Zufallsveriable X binomialverteilt ist, erhält man wegen n = 3, p = q = $^1/_2$ direkt E(X) = $^3/_2$ und V(X) = $^3/_4$.

Beweis von (6) und (7)
Nach Def. oder mit der folgenden passend gewählten Hilfsfunktion:

$f(t) = (q + pt)^n = \sum_{x=0}^{n} P_n(x) t^x$ Binomischer Lehrsatz

$f'(t) = n(q + pt)^{n-1} \cdot p = \sum_{x=0}^{n} x \cdot P_n(x) t^{x-1}$ setze t = 1

$f'(1) = n \cdot p = \sum_{x=0}^{n} x \cdot P_n(x) = E(X) = \mu$ (6)

$f''(t) = n(n-1)(q + pt)^{n-2} \cdot p^2 = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \cdot P_n(x) t^{x-2}$ setze t = 1

$f''(1) = n(n-1) \cdot p^2 = E(X^2) - E(X) = E(X^2) - \mu$

$n^2 p^2 - np^2 = \mu^2 - p\mu = E(X^2) - \mu$ nach $E(X^2)$ aufgelöst

$\mu^2 + \mu(1-p) = E(X^2)$ wegen 1 – p = q

$E(X^2) = \mu^2 + npq$

$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \mu^2 + npq - \mu^2 = npq$ (7)

Ein eleganter Beweis ergibt sich auch, indem man die Zufallsvariablen X_i (Erfolg an der i.ten Stelle) einführt.
Wegen
$E(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$
$V(X_i) = q \cdot (0-p)^2 + p \cdot (1-p)^2 = q \cdot (0-p)^2 + p \cdot q^2 = pq \cdot (p + 1 - p) = pq$
gilt wegen den Eigenschaften (2) und (4):
$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = np$ bzw. $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = npq$

Uebungsaufgaben:
a)
Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Mädchen in einer Familie mit fünf Kindern. Die Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt nehmen wir als 0.5 an (ein genauerer Wert wäre 0.486). Berechne E(X) und V(X) nach Definition und mit (6) bzw. (7)
Lösung: E(X) = 2.5, V(X) =1.25

b)
Eine Laplacemünze mit den Seiten 0 und 1 wird solange geworfen, bis eine Eins oder drei Nullen erscheinen. Es bezeiche X die Anzahl der Würfe. Berechne E(X) und V(X).

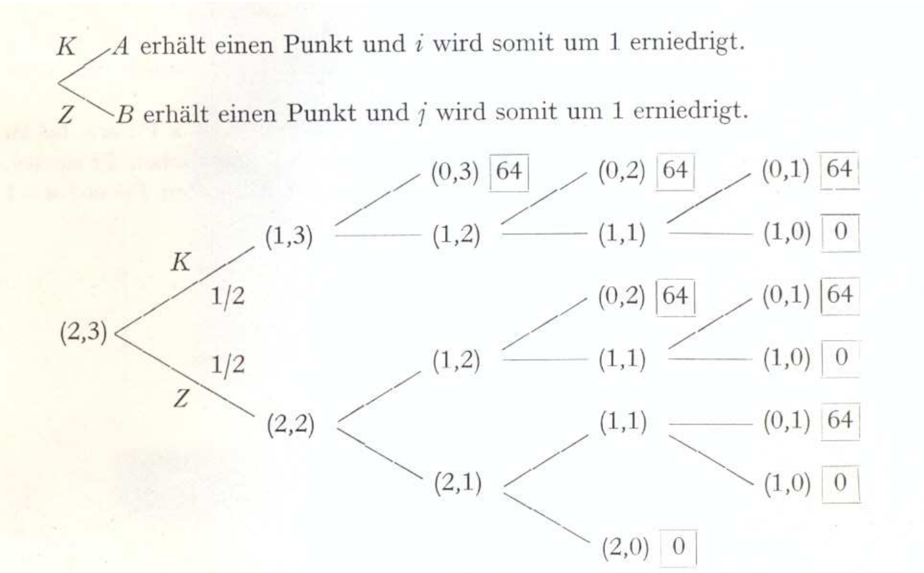
Lösung: Tip: Baumdiagramm
$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{11}{16}$

Erwartungswert bei Glücksspielen

Das folgende Problem spielt in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine grosse Rolle. Es geht um die gerechte Aufteilung des Spieleinsatzes bei vorzeitigem Abbruch eines Glückspiels. Pierre Fermat (1601 -1665) löste das Problem kombinatorisch, Blaise Pascal (1623 – 1662) mit der Idee des erwarteten Erlöses.

Problème des parti€s (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Teilungsproblem)
Zwei Spieler A und B leisten je einen Einsatz von S = 32 Fr. und vereinbaren folgendes Glückspiel: Fällt eine symmetrische Münze auf Kopf (K) erhält A einen Punkt, andernfalls B. Wer als Erster 7 Punkte erreicht gewinnt 2S = 64 Fr.. Aus einem unbekannten Grund muss das Spiel zu dem Zeitpunkt abgebrochen werden als A über 5 und B über 4 Punkte verfügen. In welchem Verhältnis ist der Gesamteinsatz 2S gerechterweise zu verteilen?

Lösung nach Pascal:
In der Abbildung ist das künftige Geschehen für beide Spieler aus der Sicht von A dargestellt. Dabei bezeichnet (i,j) den Zustand, indem Spieler A noch i und Spieler B noch j Punkte zum Gewinn benötigt-
Im Zustand (0,j) erhält A den gesamten Einsatz 2S und B geht leer aus.
Im Zustand (i,0) erhält B den gesamten Einsatz 2S und A geht leer aus.



Für den erwarteten Erlös von A erhält man dann
$E_A = ((\tfrac{1}{2})^2 + 2 \cdot (\tfrac{1}{2})^3 + 3 \cdot (\tfrac{1}{2})^4) \cdot 64 = 44$ und für den von Spieler B entsprechend
$E_B = 20$

Der totale Einsatz ist damit zwischen A und B im Verhältnis $\frac{E_A}{E_B} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5}$ aufzuteilen.

Lösung von Fermat:
Spätestens nach 4 Würfen steht fest, welcher Spieler den Gesamteinsatz gewinnt. Erreicht inskünftig A noch einen und B zwei Punkte dann steht das Spiel unentschieden und beide benötigen zum Gewinn noch einen Punkt.
In der folgenden Liste sind die $2^4 = 16$ künftig möglichen Spielverläufe aufgeführt, wobei der Buchstabe angibt, welcher Spieler den Punkt bekommt. In den mit * bezeichneten Fällen gewinnt A:

* AAAA	* ABAA	* BAAA	* BBAA
* AAAB	* ABAB	* BAAB	BBAB
* AABA	* ABBA	* BABA	BBBA
* AABB	ABBB	BABB	BBBB

Da A in 11 Fällen und B in 5 Fällen gewinnt ist der Gewinn im Verhältnis 11:5 aufzuteilen.

Uebungsaufgaben:

a)
Erraten einer von drei verdeckten Karten
(Reminiszenz von der Studienwoche einer Klasse nach Paris)

"Gewinne":	x_i	100	-100
zugehörige Wahrsch.	$p(x_i)$	$^1/_3$	$^2/_3$

Mittlerer "Gewinn" pro Spiel (sogenannter Erwartungswert) $\mu = -\frac{100}{3}$
Da die Organisatoren das Spiel nicht fair durchführten, verloren die teilnehmenden Schüler trotz vorgängiger Warnung des Klassenlehrers allesamt 100 Francs.

b)
Roulette
Der Spieler setzt seinen Einsatz e > 0 auf eine der Zahlen 0, 1, 2, ... , 36
Landet die Kugel auf dem gewählten Zahlenfeld, so erhält er 36e zurück (gewinnt also 35e), andernfalls verliert er seinen Einsatz.

Der Gewinn ist eine Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

"Gewinne"	x_i.	35e	-e
zugehörige Wahrsch	$p(x_i)$	$^1/_{37}$	$^{36}/_{37}$

Erwartungswert beim Roulette: $\mu = -\frac{e}{37}$

c)
"Chuck-a-luck" (USA) "crown and anchor" (engl.)
Ein Spieler setzt auf eine der Augenzahlen. Es werden 3 Würfel geworfen. Erscheint seine Zahl 1, 2, 3 mal, so gewinnt er das 1-, 2-, 3- fache seines Einsatzes, andernfalls verliert er seinen Einsatz. Wir wählen als Spezialfall für den Einsatz 1 Fr.

x_i	-1	1	2	3	
$p(x_i)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3	mit $p = {}^1/_6$ bzw. $q = {}^5/_6$

Erwartungswert $\mu = -\frac{17}{216}$