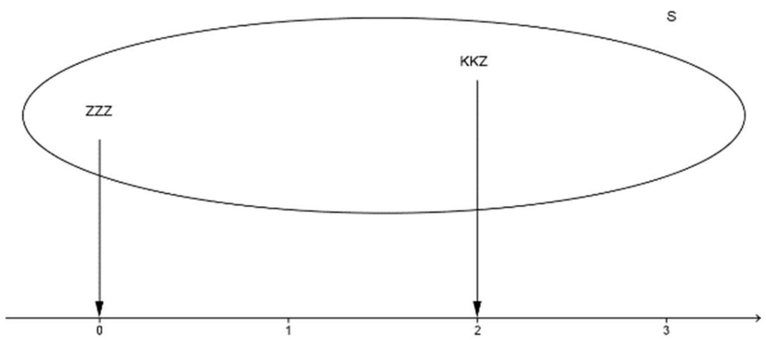
01. Zufallsvariable

Bei Zufallsversuchen interessieren oft nicht die Ergebnisse selbst, sondern Zahlen, die den möglichen Ergebnissen des Zufallsversuchs zugeordnet sind. Dies führt auf den Begriff der Zufallsvariablen (engl.: random variable).

Beispiel 1:
Eine Münze wird dreimal geworfen. Das Werfen von Kopf sei ein Erfolg.
Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft Kopf auftritt.

Modell:
Stichprobenraum S = {KKK, KKZ, ... , ZZZ}
Die Zufallsvariable X ordnet z. B. KKZ $\rightarrow$ 2 zu.



> Definition:
> Eine **diskrete Zufallsvariable** X ordnet jedem Ergebnis e_i eines Zufallsversuchs mit dem endlichen Stichprobenraum S eindeutig eine reelle Zahl x_i zu:
>
> $X: e_i \in S \;\mapsto\; x_i \in R$

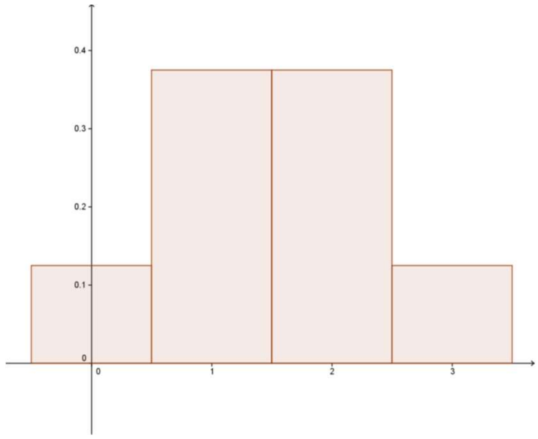
Bemerkung.
Zufallsvariable sind also Funktionen. Die Funktionswerte können als Gewinne bei einem Glücksspiel aufgefasst werden. Zufallsvariable werden mit Grossbuchstaben z.B. X, die einzelnen Werte (Realisierungen der Zufallsvariable mit x_1, x_2, ... x_i bezeichnet.
Wir betrachten zunächst den Fall, dass X nur endlich viele Werte annehmen kann. In diesem Fall heisst X diskrete Zufallsvariable.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Werte der Zufallsvariablen treten mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten auf. Die zugehörige Funktion heisst **Wahrscheinlichkeitsverteilung**. Sie ordnet den Werten x_i der Zufallsvariablen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p(x_i)$ zu, wobei $\Sigma\ p(x_i) = 1$ gilt.

Im Münzenbeispiel:
Die Zufallsvariable X „Anzahl Erfolge“ kann die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Binomialverteilung::

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$^1/_8$	$^3/_8$	$^3/_8$	$^1/_8$



Verteilungsfunktion

Die so genannte **Verteilungsfunktion** gibt für jeden Wert x_i die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable einen Wert annimmt, der höchstens so gross ist wie x_i.
Bei diskreten Zufallsvariablen entspricht dies
der Summe der Wahrscheinlichkeiten $p(x_i)$ für $x_i \leq x$:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)\ p(x_i)$$

im Münzenbeispiel:

$X = x_i$	0	1	2	3
$F(x)$	$^1/_8$	$^4/_8$	$^7/_8$	1

Beispiele
Werfen eines Laplace-Würfels:
Die Zufallsvariable X „Augenzahl“ kann die Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit den Wahrscheinlichkeiten $p(x_i) = {}^1/_6$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die **Gleichverteilung**.

Werfen von zwei Würfeln:
Die Zufallsvariable X „Augensumme“ kann die Werte 2, 3, 4, 5, ... , 12 mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten annehmen:

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Mit der Idee der **erzeugenden Polynome** können die absoluten Häufigkeiten für die Augensumme rechnerisch bestimmt werden.
Dazu ermittelt man die Koeffizienten des Polynoms $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$
Als Koeffizient von x^8 z.B. ergibt sich 5, womit die Augensumme 8 genau fünfmal auftreten kann, nämlich bei den Ergebnissen (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), 6,2).

Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Analog zu den empirischen Häufigkeitsverteilungen charakterisieren wir Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch Masszahlen, sogenannte Parameter:
Der **Erwartungswert** ist das Gegenstück zum empirischen Mittelwert und die **Varianz** bzw. **Standardabweichung** das Gegenstück zur empirischen Varianz bzw. Standardabweichung.
Dabei treten im Modell an die Stelle der relativen Häufigkeiten $\frac{n_i}{n}$ die Wahrscheinlichkeiten $p(x_i)$.

Definition:

$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$ **Erwartungswert E(x**) einer Zufallsvariablen

Bemerkung.
Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen kann als mittlerer Gewinn beim Glückspiel auf lange Sicht aufgefasst werden.

Im Beispiel 1 (Münzenwurf) erhält man

$$\mu = E(X) = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Der Erwartungswert allein beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung nur unvollständig. Zwei Verteilungen mit gleichem Erwartungswert können ganz verschieden um den Erwartungswert streuen. Als Mass für die mittlere Abweichung der Werte der Zufallsvariablen vom Erwartungswert definieren wir die Varianz V(X) bzw. die Standardabweichung σ.

Definition:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot (x_i - \mu)^2$$

$\sigma^2 = V(x) \quad \sigma \geq 0$ V(X) **Varianz,** σ heisst **Standardabweichung**.

Bemerkung:
Die Quadrate der Abweichungen vom Erwartungswert werden mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtet.

Münzenbeispiel:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{8} \cdot \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0.866$$

Übungsaufgabe:

Gesucht sind für die Zufallsvariable X der Erwartungswert und die Varianz:

a)

x_i	2	3	11
$p(x_i)$	$^1/_3$	½	$^1/_6$

b)

x_i	6	8	9	10
$p(x_i)$	0.4	0.1	0.2	0.3

Lösung:

a) E(X) = 4, V(X) = 10

b) E(X) = 8, V(X) = 3

Gesetze für den Erwartungswert und die Standardabweichung

(1) $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$ $\quad k \in \mathrm{R}$

(2) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ $\qquad$ als Spezialfall: $E(X + k) = E(X) + k$ $\quad k \in \mathrm{R}$

(3) $V(k \cdot X) = k^2 \cdot V(X)$ $\qquad V(X + k) = V(X) + k$

(4) $V(X \pm Y) = V(X) \pm V(Y)$

Der wichtige Verschiebungssatz

(5) $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = E(X^2) - \mu^2$

Beweis von (5):

$$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \overset{1,2}{=} E(X^2) - 2\mu\ E(X) + E(\mu^2)$$
$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Illustration am Münzenbeispiel

X:	0	1	2	3
X^2:	0	1	4	9
$p(x_i)$	$^1/_8$	$^3/_8$	$^3/_8$	$^1/_8$

$$E(X^2) = \frac{1}{8} \cdot 0^2 + \frac{1}{8} \cdot 1^2 + \frac{1}{8} \cdot 2^2 + \frac{1}{8} \cdot 3^2 = 3$$
$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Aufgabe:

Zwei Laplacewürfel werden geworfen. Die Zufallsvariablen X und Y bezeichnen ihre Augenzahl. Gesucht sind der Erwartungswert und die Varianz für die Augensumme $S = X + Y$.

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = E(Y) = 3.5$$

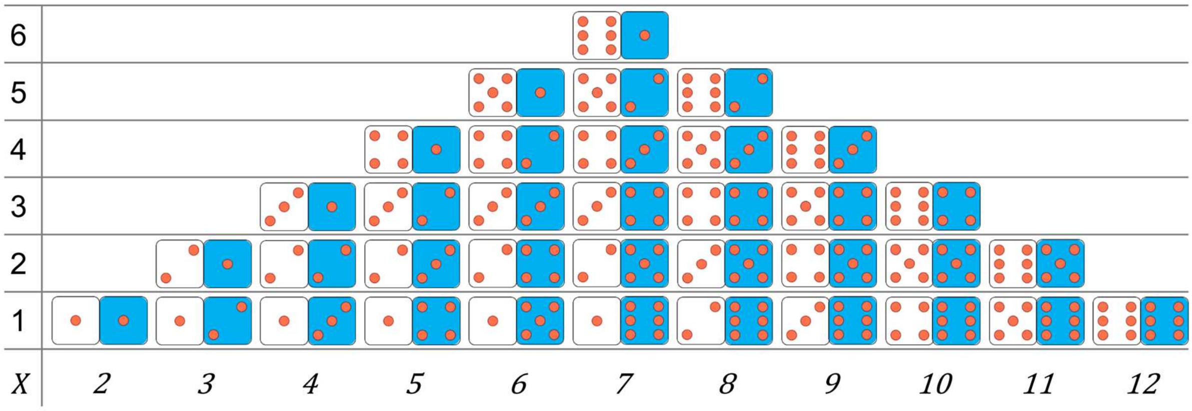
wegen 5) gilt:

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{1}{6} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - 3.5^2 = V(Y) \approx 2.916..$$

Nach 2) und 4) gilt:

$$E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 3.5 + 3.5 = 7$$
$$V(S) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) \approx 2.916 + 2.916$$

Beispiel Augensumme zweier Laplacewürfel:



Erwartungswert und Standardabweichung von X:

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\mu = \frac{1}{36} \cdot (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \cdots + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1) = 7$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{36}(2-7)^2 + \frac{2}{36}(3-7)^2 + \ldots + \frac{2}{36} \cdot (11-7)^2 + \frac{1}{36}(12-7)^2 = \frac{210}{36} = \frac{35}{6} \approx 5.83$$

Diese Werte der Parameter können auf den Fall des einfachen Wurfs zurückgeführt werden. Wegen den Eigenschaften (1) bis (4) einer Zufallsvariablen gilt:

Sei X die Augenzahl des ersten Würfels und Y die des zweiten, dann gilt:

wegen (2): $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$

wegen (4): $V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6} \approx 5.83 \quad \sigma = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2.41$

Sind wie im Beispiel X und Y **unabhängige Zufallsvariablen**, dann gilt auch für das Produkt X·Y:

$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$
$V(X \cdot Y) = V(X) \cdot V(Y)$

Dabei ist die Unabhängigkeit folgendermassen definiert:

> Definition:
> Sind X und Y unabhängig dann gilt:
>
> $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \; und \; (X \cdot Y) = V(X) \cdot V(Y)$

Im Allgemeinen ist hingegen:

$E(X \cdot Y) \neq E(X) \cdot E(Y) \; bzw. \; V(X \cdot Y) \neq V(X) \cdot V(Y)$

Die folgende Gegenüberstellung zwischen den empirischen und theoretischen Werten ist wichtig:

empirisch:	rel. Häufigkeit $h(x_i)$	emp. Mittelwert $\bar{x}$	empirische Varianz s^2
Modell:	Wahrscheinlichkeit $p(x_i)$	Erwartungswert $E(X) = \mu$	Varianz $V(X) = \sigma^2$

Im folgenden Beispiel werden die in einem Klassenversuch ermittelten Daten mit den entsprechenden Werten des Modells verglichen. Die angewandte Statistik (→Beurteilende Statistik, Inferenzstatistik) lehrt, wie man Schätzwerte für die i.a. unbekannten Parameter z.B. Erwartungswert, Varianz schätzen kann.

Zufallsexperiment Werfen von 3 Münzen Apr 97

Anzahl Kopf		abs. H n_i	re. H. h_i		Wahrsch. $p(x_i)$
0		27	0.129		0.125
1		73	0.348		0.375
2		83	0.395		0.375
3		27	0.129		0.125
Summe		210	1.000		1.000
emp. Mittelwert			**1.524**	**Erwart.wert**	**1.500**
Varianz	empirisch		**0.767**	Modell	**0.750**
Stand.abw.	empirisch		**0.876**		**0.866**

Die Bedeutung von Erwartungswert und Standardabweichung liegt darin, dass für viele Wahrscheinlichkeitsverteilungen (insbesondere für die später erwähnte Normalverteilung) gilt:
$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 66.7\%$
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 94.4\%$

Das heisst, dass in den angegebenen Intervallen etwa $^2/_3$ bzw. 95% aller Werte der Zufallsvariablen liegen. 3σ-Abweichungen vom Erwartungswert kommen praktisch nicht vor.

Diese Aussage gilt nicht nur im Modell, sondern in vielen Fällen auch für die in der angewandten Statistik erfassten Daten.
Zufallsvariable: https://www.youtube.com/watch?v=DoHTsDrzAQk