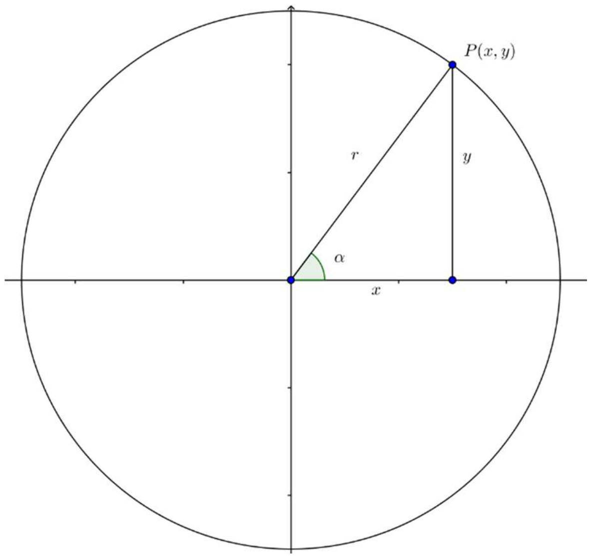
Trigonometrie 2

1. Definition der trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel

In einem Kreis mit Mittelpunkt $M(0,0)$ und Radius r ist der zunächst spitze Winkel α gezeichnet. α legt auf dem Kreis eindeutig einen Punkt mit den Koordinaten (x, y) fest.

Problem:
Wie lassen sich die kartesischen Koordinaten (x, y) eines Punktes aus den Polarkoordinaten (r, α) ohne Fallunterscheidung berechnen?



Betrachtet man in der Abbildung das rechtwinklige Dreieck im 1. Quadranten, dann gilt nach der bisherigen Definition

$x = r \cdot cos\ \alpha$ bzw.
$y = r \cdot sin\ \alpha$

Damit kann die bisherige Definition für beliebige Winkel folgendermassen erweitert werden:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \alpha \neq 90° + k \cdot 180°$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} \qquad \alpha \neq k \cdot 180° \qquad k \in Z$$

Gemäss der neuen Definition können die trigonometrischen Funktionswerte näherungsweise folgendermassen bestimmt werden:
Man trägt in einem Kreis mit Mittelpunkt $M(0,0)$ und Radius r den Winkel α ab und liest die Koordinaten des zugehörigen Kreispunkts aus der Skizze ab. Aus den betreffenden Verhältnissen von x, y, r können dann die Funktionswerte bestimmt werden.
Als Konsequenz der Definition ergibt sich, dass die trigonometrischen Funktionswerte auch negativ sein können.

Beispiele:
a) $r = 5$, $\alpha = 53°$: Skizze: $x \approx 3.1$, $y \approx 3.9$

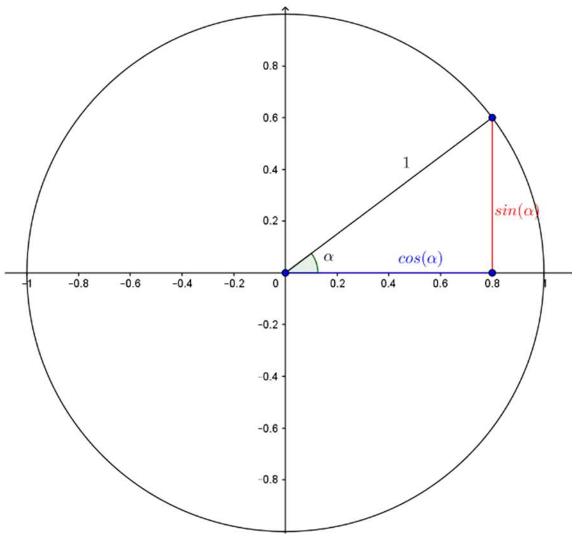
$$\sin 53° \approx \frac{3.9}{5} \approx 0.78,\ \cos 53° \approx \frac{3.1}{5} \approx 0.62,\ \tan 53° \approx \frac{3.9}{3.1} \approx 1.26,\ \cot 53° \approx \frac{3.1}{3.9} \approx 0.79$$

b) $r = 5$, $\alpha = 250°$: Skizze: $x \approx -1.7$, $y \approx -4.7$

$$\sin 250° \approx -0.94,\ \cos 250° \approx -0.34,\ \tan 250° \approx 2.76,\ \cot 250° \approx 0.36$$

Die Definition hängt nur vom Winkel, jedoch nicht vom Radius des gewählten Kreises ab (ähnliche Dreiecke!).

Wählt man den Kreisradius insbesondere 1, so lässt sich sagen:



Der Sinus eines Winkels ist gerade gleich der y-Koordinate des zugehörigen Punktes im Einheitskreis, der Cosinus gleich der x-Koordinate.

Beispiel in der Abbildung:
$\sin\alpha \approx 0.6 \quad \cos\alpha \approx 0.8$

Die bereits bekannten Grundbeziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen bleiben erhalten:

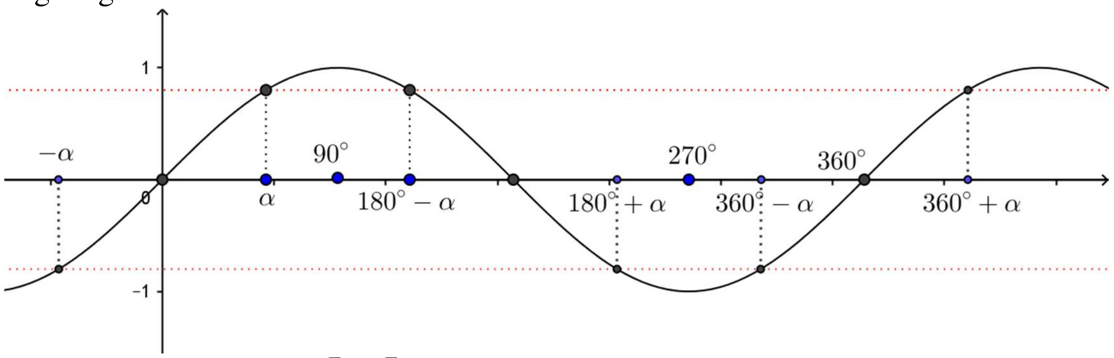
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (1)$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \qquad (3)$$

2. Der Graph der Sinusfunktion $x \rightarrow \sin x$

Damit der Graph nicht verzerrt erscheint, wird der Winkel auf der x-Achse im Bogenmass abgetragen.

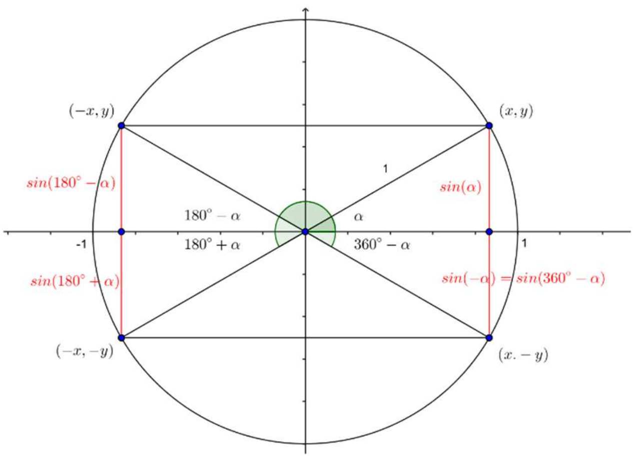


$-t$ t $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2} - t$ π $\pi + t$ $2\pi - t$ 2π $2\pi + t$

Aus der Definition der Sinusfunktion ergeben sich die nachstehenden Folgerungen. Sie lassen sich aus dem Graphen der Sinusfunktion oder der folgenden Abbildung herauslesen:

1. Periodizität:
Der Sinuswert ändert sich nicht, wenn man zum Winkel ein ganzzahliges Vielfaches von 360° (2π) addiert, denn die y-Koordinate des Punktes ändert sich dabei nicht.
$sin(\alpha + k \cdot 360°) = sin\alpha$ bzw. im Bogenmass $sin(t + k \cdot 2\pi) = \sin t$
Der Graph geht also bei einer Verschiebung in x-Richtung um 360° (2π) in sich über.

2. Vorzeichen:
Das Vorzeichen ergibt sich aus der Definition entsprechend der Lage des Punktes (x, y) in den vier Quadranten. Der Sinus ist im 1. und 2. Quadranten positiv, im 3. und 4. Quadranten negativ (das Vorzeichen der y-Koordinate ist negativ).



3. Quadrantenrelationen:
Spiegelt man den Punkt (x, y) zunächst an der y-Achse, der x-Achse und wieder an der y-Achse so erhält man schrittweise die

Punkte	Zentriwinkel	im Gradmass	im Bogenmass
$(-x, y)$	$180° - \alpha$	$sin(180° - \alpha) = sin\alpha$	$sin(\pi - t) = sin\ t$
$(-x, -y)$	$180° - \alpha$	$sin(180° + \alpha) = sin\alpha$	$sin(\pi + t) = -sin\ t$
$(x, -y)$	$360° - \alpha$	$sin(360° - \alpha) = -sin\alpha$	$sin(2\pi - t) = -sint$

also gilt:

> Die Sinuswerte stimmen vom Vorzeichen abgesehen (dem Betrage nach) an den
> Stellen α, $180° - \alpha$, $180° + \alpha$, $360° - \alpha$ und $-\alpha$
> bzw. im Bogenmass an den
> Stellen t, $\pi - t$, $\pi + t$, $2\pi - t$ und $-t$ überein.

4. Symmetrie:
Da $sin\ (-\alpha) = -sin\ \alpha$ ist die Sinuskurve zentralsymmetrisch zum Nullpunkt.

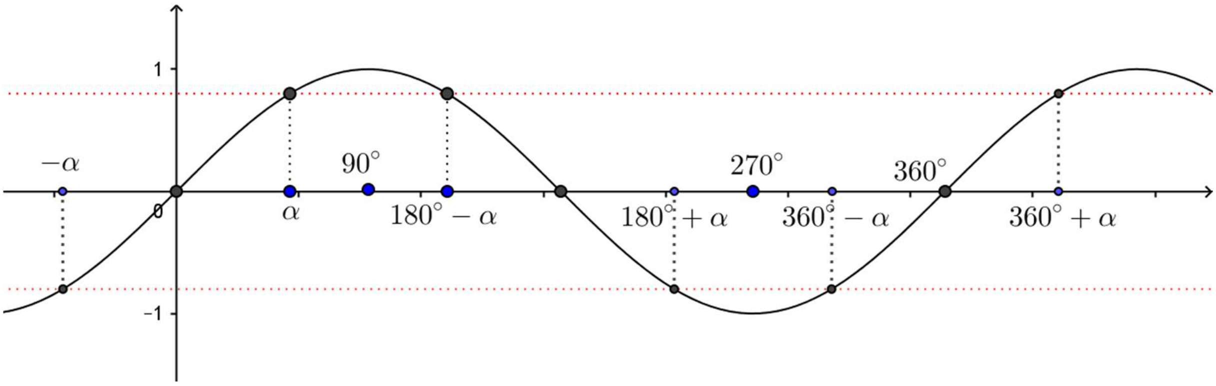
Mit dieser erweiterten Definition entsprechen einem gegebenen Sinuswert unendlich viele Winkel. Beschränkt man sich auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dann hat die Gleichung $y = sin\ x$ für $y \in [-1, 1]$ genau eine Lösung x. Die zugehörige Funktion heisst Arcussinus und wird mit arcsin bezeichnet:

$y\ =\ arcsin\ (x)$ ist gleichbedeutend mit $sin\ y\ =\ x$
d.h. y ist der Bogen (arcus), dessen Sinuswert x ist.

z.B. $y = arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, denn $sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\ =\ 1$

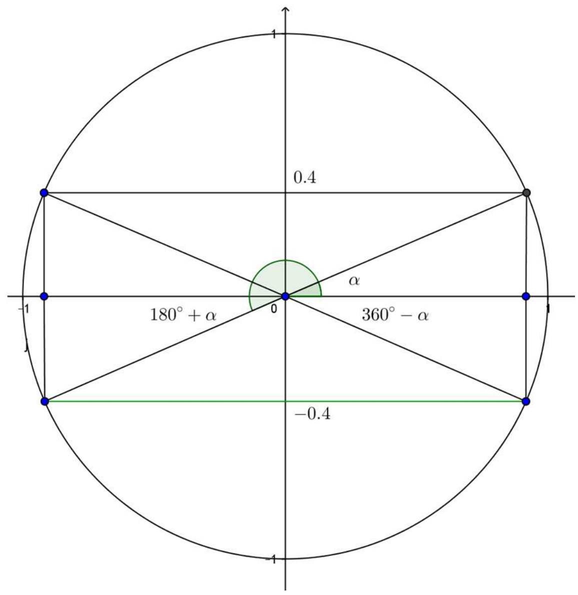
Funktion:	Sinus	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow$ [-1,1]
Umkehrfunktion:	Arcussinus	[-1,1] $\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Beispiel:
Gegeben: $sin\ \alpha\ =\ 0.8$
Gesucht: alle Winkel α mit 0 < α < 360°.



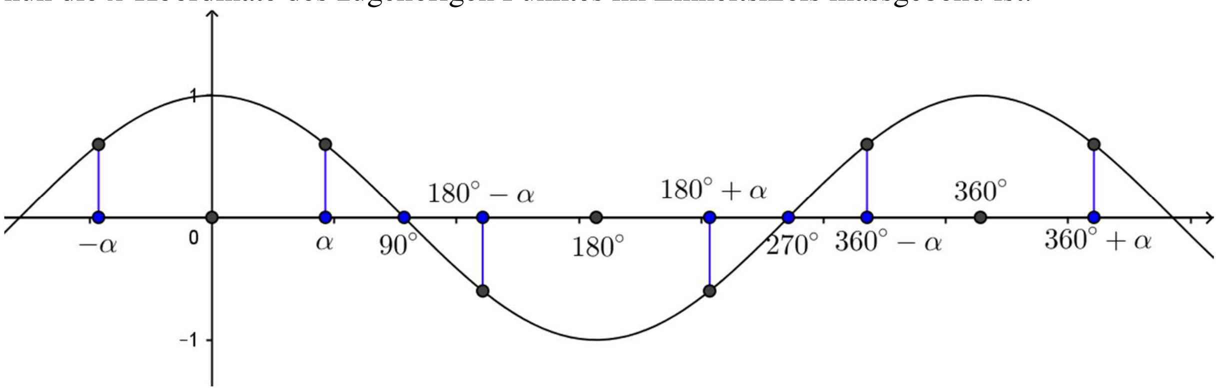
Der Sinus ist im 1. und 2. Quadranten positiv. Mit dem Taschenrechner ergibt den zugehörigen spitzen Winkel $\alpha = arcsin(0.8) \approx\ 53.1°$
Damit hat die Gleichung : $sin\ \alpha\ =\ 0.8$ die Lösungen
$\alpha_1 = arcsin(0.8) \approx\ 53.1°$ und $\alpha_2 = 180° - \alpha_1 \approx 126.9°$ bzw. im Bogenmass
$t_1 \approx 0.93$ und $t_2 = \pi - t_1 \approx 2.21$
Weitere Lösungen ergeben sich daraus, indem man ein ganzzahliges Vielfaches von 360° bzw. von 2π addiert.

Beispiel:
$sin\,\alpha\ =\ -0.4$
Gesucht sind also die Winkel der Punkte des Einheitskreises mit der vorgegebenen y-Koordinate -0.4
Es ist zu empfehlen zunächst die Gleichung $sin\,\alpha\ = +\,0.4$ zu lösen.
Sie hat die spitze Lösung
$\alpha = \arcsin(0.4) \approx 23.6°$
Die Lösungen der Gleichung $sin\,\alpha\ =\ -0.4$ ergeben sich dann daraus zu:
$\alpha_1 \approx\ 180°\ +\ 23.6°\ \approx 203.6°$ und
$\alpha_2 \approx\ 360° -\ 23.6°\ \approx 336.4°$



3. Der Graph der Cosinusfunktion $x \to \cos x$

Der Graph der Cosinusfunktion ergibt sich entsprechend zu dem der Sinusfunktion, wobei nun die x-Koordinate des zugehörigen Punktes im Einheitskreis massgebend ist.



Aus der Definition der Definition ergibt sich:

1. Periodizität:
Der Cosinus ist periodisch mit der Periode 360° (2π).

2. Vorzeichen:
Der Cosinus ist im 1. und 4. Quadranten positiv, im 2. und 3. Quadranten negativ (entsprechend dem Vorzeichen der x-Koordinate des Punktes auf dem Einheitskreis).

3. Quadrantenrelationen:
$cos\,(180° - \alpha) = -cos\ \alpha \quad cos\,(180° + \alpha) = -cos\ \alpha \quad cos\,(360° - \alpha) = cos\ \alpha$

4. Symmetrie:
Wegen $cos\,(-\alpha) = cos\ \alpha$ ist die Cosinuskurve axialsymmetrisch zur y-Achse.
d.h. der Cosinuswert ändert sich nicht, wenn man das Vorzeichen des Winkels ändert bzw. die Drehrichtung wechselt.

Beschränkt man sich in diesem Fall auf das Intervall $[0, \pi]$, so entspricht einem gegebenen Cosinuswert genau ein Winkel. Die zugehörige Funktion heisst Arcuscosinus und wird mit arccos abgekürzt.

$y = arccos\,(x)$ ist gleichbedeutend mit $cos\, y = x$
d.h. y ist der Bogen (arcus), dessen Cosinuswert x ist

z.B. $y = arccos(-1) = \pi$, denn $cos\, \pi = -1$

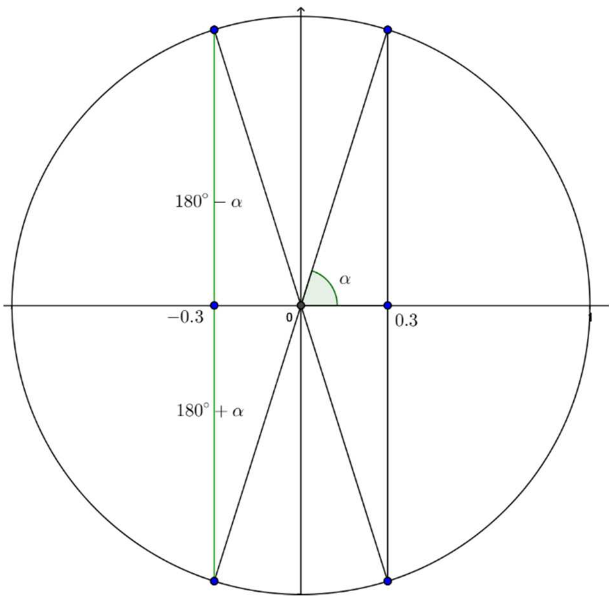
Funktion:	Cosinus	$[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$
Umkehrfunktion:	Arcuscosinus	$[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

Es wird empfohlen, bei der Arcuscosinus-Funktion ausschliesslich positive Cosinuswerte beim Taschenrechner einzugeben, denn die Bestimmung der übrigen Winkel wird so vereinfacht.

Beispiel:
Gegeben. $cos\, \alpha = 0.65$
Gesucht: alle Winkel α mit $0 < \alpha < 360°$.

Der Cosinus ist im 1. und 4. Quadranten positiv. Mit dem Taschenrechner erhält man
$\alpha_1 = arccos(0.65) \approx 49.3°$ und damit $\alpha_2 = 360° - \alpha_1 \approx 310.5°$.
Weitere Lösungen ergeben sich daraus, indem man ein ganzzahliges Vielfaches von 360° addiert.

Beispiel:
Gegeben. $cos\, \alpha = -0.3$
Gesucht: alle Winkel mit $0 < \alpha < 360°$.
Die Gleichung $cos\, \alpha = +0.3$ hat die Lösung
$\alpha_1 = arccos(0.3) \approx 72.5°$



Da der Cosinus ist im 2. und 3. Quadranten negativ ist, ergeben sich die Lösungen der Gleichung
$cos\, \alpha = -0.3$. zu
$\alpha_1 \approx 180° - 72.5° \approx 107.5°$ und
$\alpha_2 \approx 180° + 72.5° \approx 205.5°$

Den Lösungen entsprechen die Lösungen den Punkten des Einheitskreises, deren x-Koordinaten den Wert -0.3 haben.

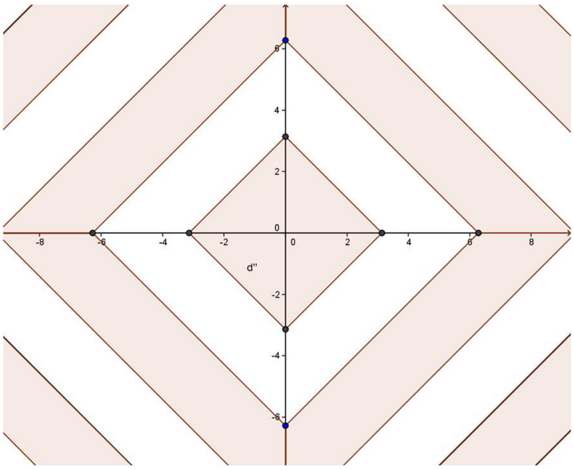
Aufgabe:
Gesucht sind alle Lösungen α der Gleichung $\cos(2\,\alpha - 30°) = -\frac{1}{2}$ mit $0° < \alpha < 360°$

$2\,\alpha - 30° = 120° + k \cdot 360°$ $\qquad$ $\alpha = 5° + k \cdot 180°$
$2\,\alpha - 30° = 240° + k \cdot 360°$ $\qquad$ $\alpha = 135° + k \cdot 180°$
L = {75°, 135°, 255°, 315°}

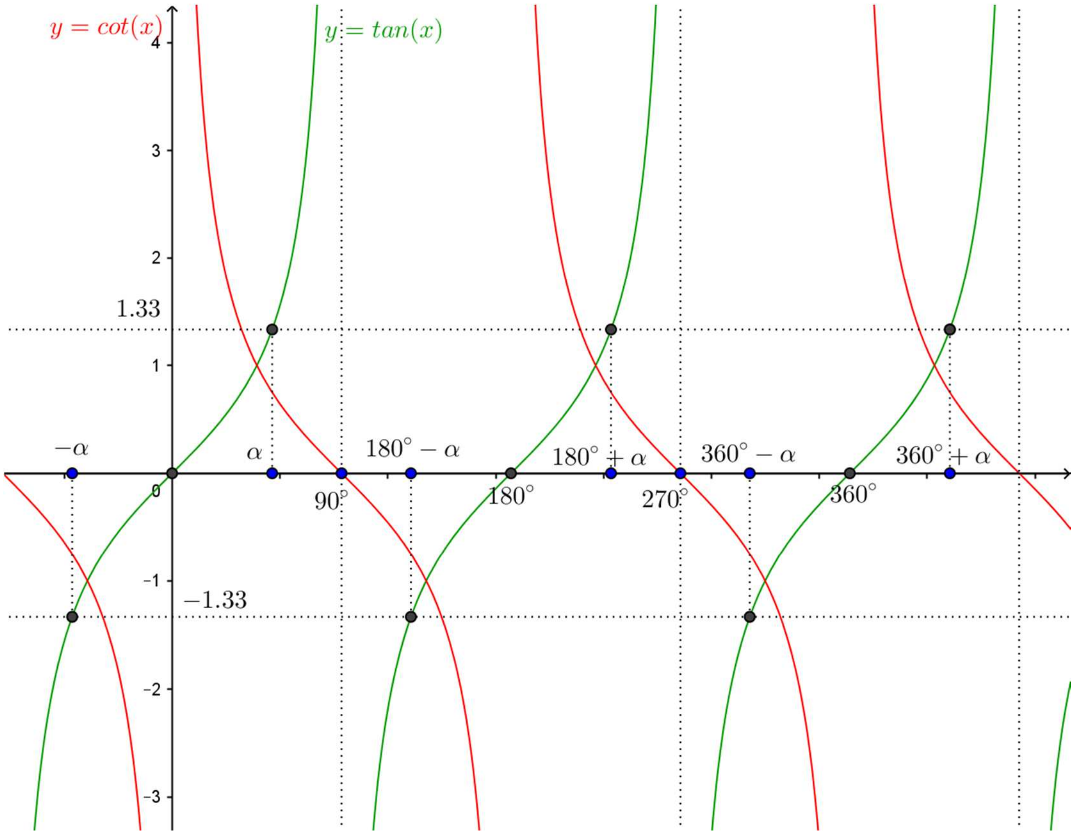
Multipliziert man diese Lösungen mit dem Umrechnungsfaktor $\frac{\pi}{180°}$ dann erhält man die entsprechenden Lösungen im Bogenmass
L = {1.31, 4.45, 2.36, 5.50}

Übungsaufgabe für Fortgeschrittene (*)
Suche alle Punkte P(x, y), für die gilt $\sin(|x| + |y|) > 0$.

Lösung:



4. **Der Graph der Tangens- bzw. Cotangensfunktion**



Aus der Definition ergibt sich:

1. Periodizität:
Tangens und Cotangens sind periodisch sogar mit der Periode **180° (π).**

2. Vorzeichen:
Tangens und Cotangens sind im 1. und 3. Quadranten positiv, im 2. und 4. Quadranten negativ.

3. Quadrantenrelationen:

$tan\ (180° - \alpha) = tan\ (360° - \alpha) = -\ tan\ \alpha$ $\qquad tan\ (180° + \alpha) = tan\ \alpha$
$cot\ (180° - \alpha) = cot\ (360° - \alpha) = -cot\ \alpha$ $\qquad \cot(180° + \alpha) = \cot\ \alpha$

4. Symmetrie:
Tangens und Cotangenskurve sind punktsymmetrisch zum Ursprung. Wegen der Periodizität gehen sie bei einer Translation um 180° (π) in x-Richtung in sich über.

Beschränkt man sich in diesem Fall auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ so entspricht einem gegebenen Tangenswert genau ein Winkel. Die zugehörige Funktion heisst Arcustangens und wird mit arctan abgekürzt.

$y = arctan\ (x)$ ist gleichbedeutend mit $tan\ y = x$
d.h. y ist der Bogen (arcus), dessen Tangenswert x ist

z.B. $y = arctan\ (-1) = \frac{3\pi}{4}$, denn $tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

Funktion:	Tangens	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$\rightarrow\ [-\infty,\infty]$
Umkehrfunktion:	Arcustan	$[-\infty,\infty]$	$\rightarrow\ \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Beispiel (vgl. die Abbildung auf Seite 8):
Gegeben. $tan\,\alpha\ =\ 1.33$
Gesucht: alle Winkel mit $0 < \alpha < 360°$.
Mit dem Taschenrechner erhält man
$\alpha_1 = arctan(1.33) \approx 53.1°$ und damit $\alpha_2 = \alpha_1 + 180° \approx 233.1°$.

Beispiel:
Gegeben. $cot\,\alpha\ = -2$
Gesucht: alle Winkel mit $0 < \alpha < 360°$.

Der Cotangens ist der Kehrwert des Tangens. Die Aufgabe ist also gleichbedeutend mit:
$tan\,\alpha = -\frac{1}{2}$. Die Lösungen liegen also im 2. und 4. Quadranten.
Die Gleichung
$tan\,\alpha = \frac{1}{2}$ hat die Lösung $\alpha = arctan \approx 26.6°$.
Damit hat die Gleichung $cot\,\alpha\ = -2$ die Lösungen
$\alpha_1 \approx 180° - 26.6° \approx 233.1°$ und $\alpha_2 \approx \alpha_1 + 180° \approx 333.4°$

Übungsaufgabe:
Für einen Winkel α mit $90° < \alpha < 180°$ mit $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ ist ohne Taschenrechner der genaue Wert für $\tan\alpha$ zu bestimmen.

Lösung:
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

5. Zusammenfassung

Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch mit der Periode 360° (2π), Tangens und Cotangens sogar mit der Periode 180° (π).

Die Funktionswerte stimmen vom Vorzeichen abgesehen an den Stellen
$\alpha, \qquad 180° - \alpha, \qquad 180° + \alpha, \qquad 360° - \alpha \quad und\ -\ \alpha$
überein. Das Vorzeichen richtet sich nach dem Vorzeichen der x- bzw. y-Koordinate des entsprechenden Kreispunkts.

Wegen
$sin(-\alpha) = -sin\ \alpha \qquad cos(-\alpha) = cos\ \alpha \qquad tan(-\alpha) = -tan\ \alpha \qquad cot(-\alpha) = -cot\ \alpha$

sind die Graphen der Sinus-, Tangens- und Cotangensfunktion zentralsymmetrisch zum Ursprung. Sinus, Tangens und Cotangens nennt man deshalb ungerade Funktionen.
Der Graph der Cosinusfunktion ist hingegen axialsymmetrisch zur y-Achse.
Der Cosinus ist eine sogenannte gerade Funktion.