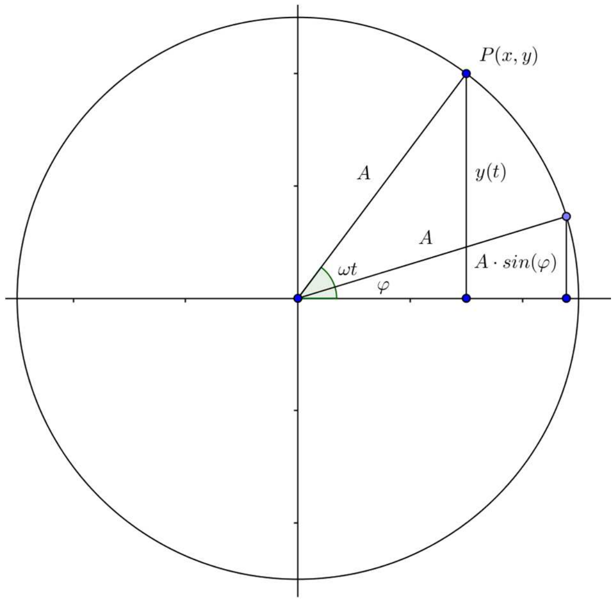
9. Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)

Der Punkt P in der Grundebene rotiert im Abstand A vom Ursprung O gleichförmig um den Ursprung O mit der Winkelgeschwindigkeit ω in positivem Drehsinn. Zur Zeit t = 0 schliesst $\overrightarrow{OP}$ mit der positiven x-Achse den Winkel φ ein. Die Auslenkung y von der x-Achse kann dann in der folgenden Form dargestellt werden:



$y(t) = A \cdot \sin(\omega\, t + \varphi)$ A, ω > 0 (1)

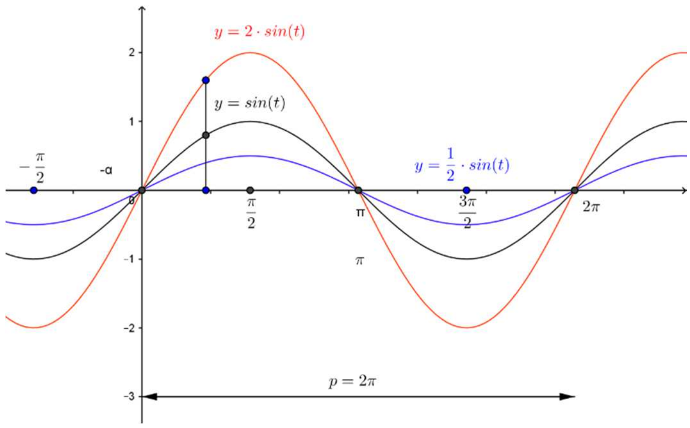
Im Folgenden wird die Bedeutung der auftretenden Parameter A, ω, φ untersucht.

Spezialfälle:

1. $y(t) = A \cdot \sin(\,t)$

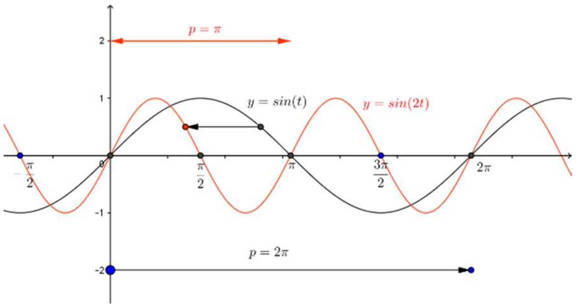
Abbildung: $A = 1, 2, \frac{1}{2}$

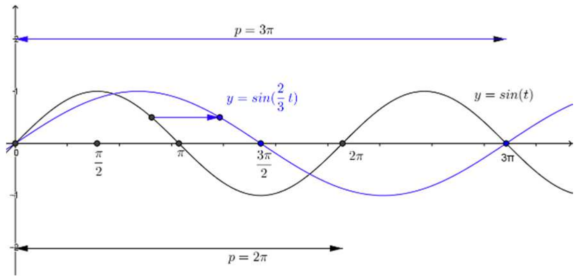
Die y-Werte werden mit dem Faktor A vergrössert (verkleinert). Eine Veränderung des Radius A bewirkt geometrisch eine **Dehnung der y-Koordinaten senkrecht zur x-Achse** im Verhältnis A:1 (sogenannte normale Affinität bezüglich der x-Achse).



Die Periode p ist 2π.

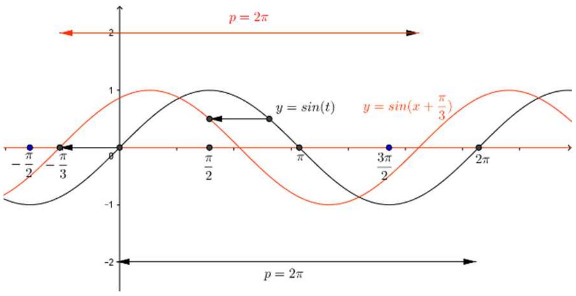
2. $y(t) = A \cdot \sin(\omega\, t)$ Skizze: $\omega = 1,\ 2,\ \frac{2}{3}$

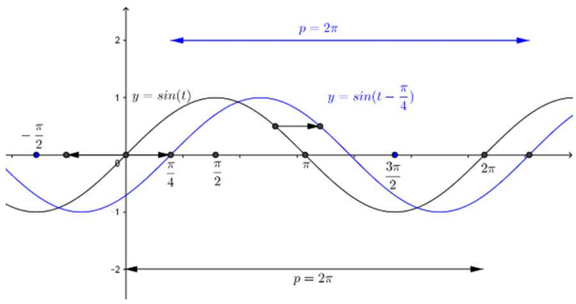




Die Veränderung der Drehgeschwindigkeit ω bewirkt eine **Dehnung senkrecht zur y-Achse** im Verhältnis 1:ω (normale Affinität zur y-Achse).
Der Faktor ω verändert damit die Periode p.
p ist umgekehrt proportional zu ω.
Nimmt nämlich ωt um 2π zu, dann nimmt t um p = $\frac{2\pi}{\omega}$ zu.

3. $y(t) = A \cdot \sin(\,t + \varphi)$ Skizze: φ =0, π/3, -π/4





Der Parameter φ bewirkt eine **Translation der Sinuskurve in t-Richtung** um den Vektor $(-\varphi, 0)$, denn die Kurve $y = sin\ (t\ + \varphi)$ schneidet die x-Achse an den Stellen $t + \varphi\ = k\pi$ bzw $t = -\varphi + k\pi$.
Es ist zu beachten:

$\varphi\ >\ 0$ Verschiebung nach links (Vorsprung)
$\varphi\ <\ 0$ Verschiebung nach rechts (Verspätung)

4. vorbereitendes Beispiel für den allgemeinen Fall:

$y = 3 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot \sin\left(2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$A = 3$ maximaler y-Wert

$\omega = 2$

Die Kurve schneidet die t-Achse an der Stelle

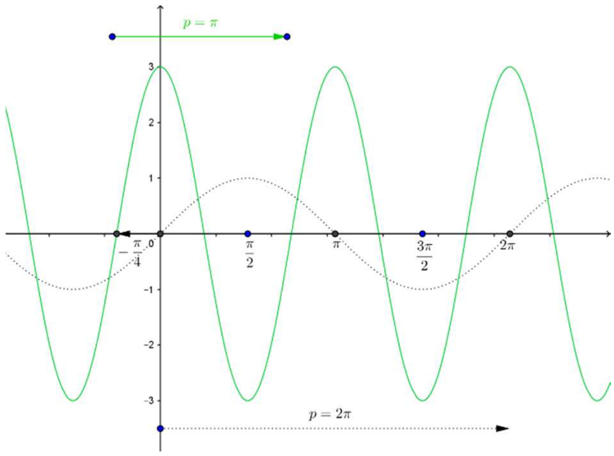
$2t + \frac{\pi}{2} = 0$ also bei $t = -\frac{\pi}{4}$

Für die Periode p muss gelten:

$2(t + p) + \frac{\pi}{2} = 2t + \frac{\pi}{2} + 2\pi$ und damit:

$2t + 2p + \frac{\pi}{2} = 2t + \frac{\pi}{2} + 2\pi$ also gilt für die

Periode $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$



Allgemeiner Fall: A, ω > 0

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$
$$= A \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right)$$

maximaler y-Wert: A

Für die Periode p muss gelten:

$\omega(t + p) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$

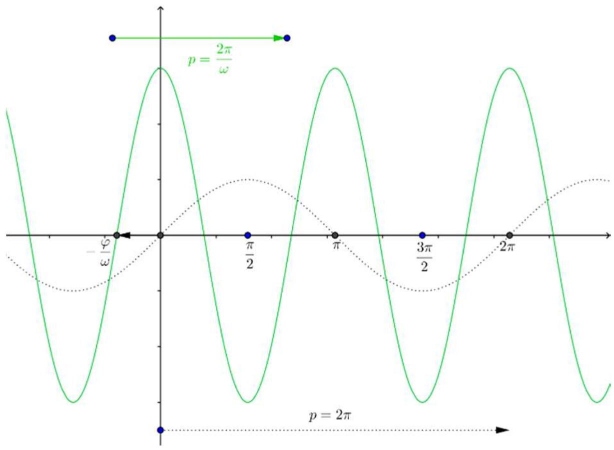
Periode: $p = \frac{2\pi}{\omega}$

Die Kurve schneidet

die t-Achse an der Stelle t_0

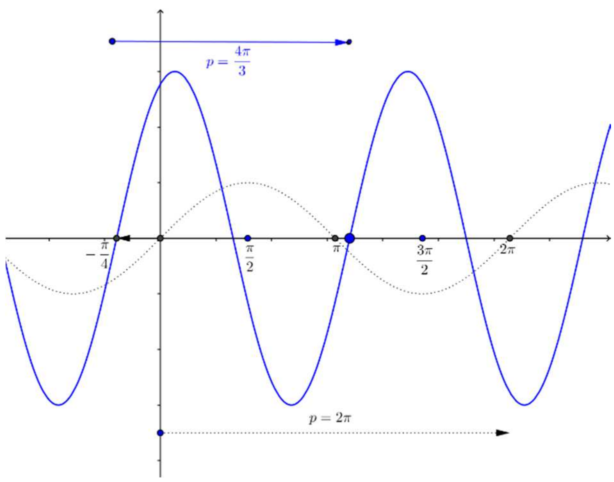
mit $\omega t_0 + \varphi = 0$ und damit

$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$ (Phasenverschiebung)



Beispiel:

$y(t) = 3 \cdot \sin(\frac{3}{2} \cdot t + \frac{3\pi}{8}) = 3 \cdot \sin(\frac{3}{2} \cdot (t + \frac{\pi}{4})$



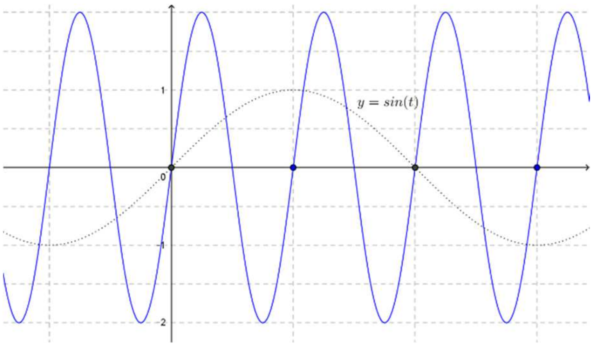
maximaler y-Wert: $A = 3$

Periode: $p = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{4\pi}{3}$

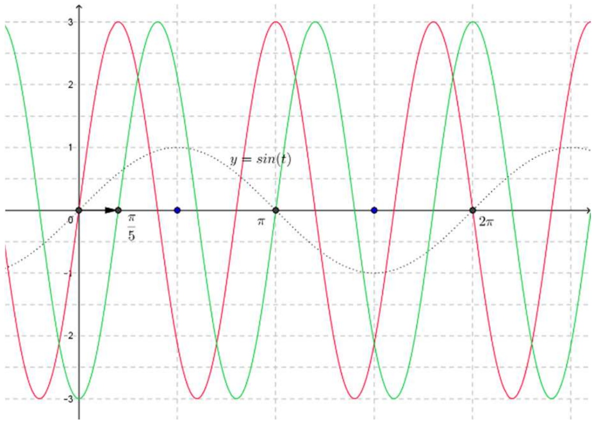
Phasenverschiebung $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega} = -\frac{\pi}{4}$

Aufgabe:
Zu den gezeichneten Graphen ist die passende Funktionsgleichung gesucht.

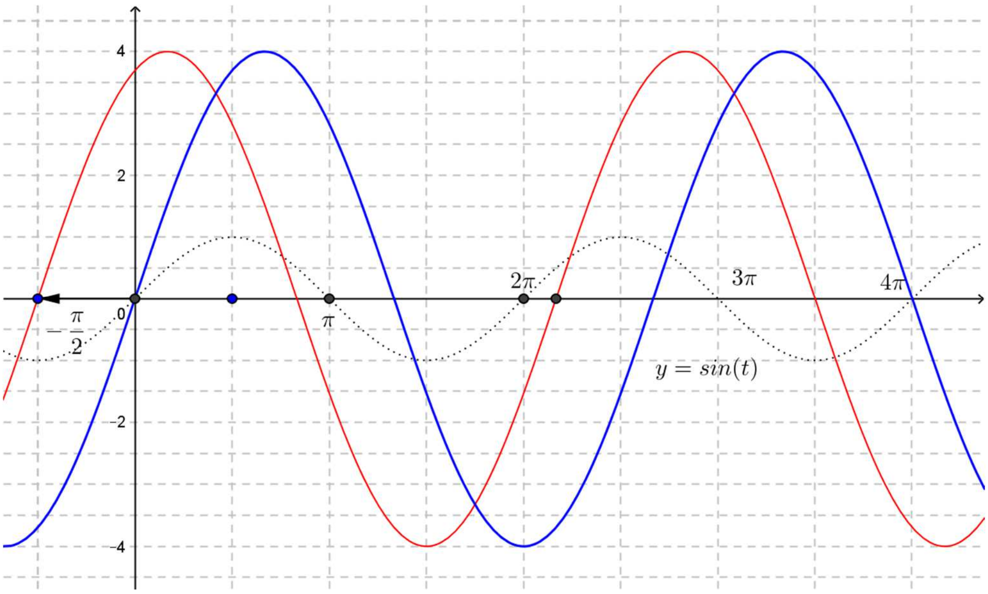
a)



b)



c)



Lösungen:

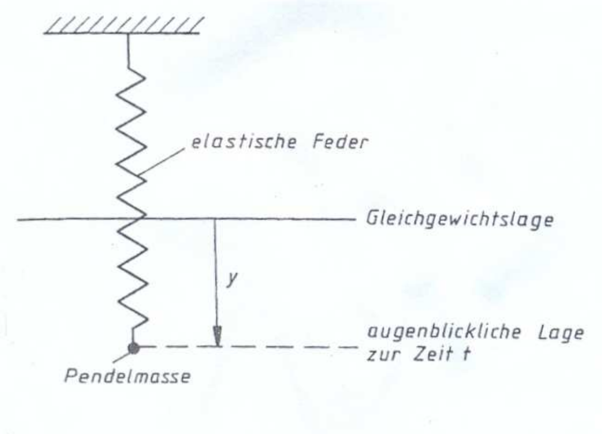
a) $y(t) = 2 \cdot \sin(4t)$

b) $y(t) = 3 \cdot \sin\left(\frac{5}{2} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot \sin\left(\frac{5}{2} \cdot \left(t - \frac{\pi}{5}\right)\right)$

c) $y(t) = 4 \cdot \sin\left(\frac{3}{4} \cdot t + \frac{3\pi}{8}\right) = 4 \cdot \sin\left(\frac{3}{4} \cdot \left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

Bei der Beschreibung von mechanischen oder elektromagnetischen Schwingungen spielen Sinusfunktionen eine wichtige Rolle.

$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ (1)

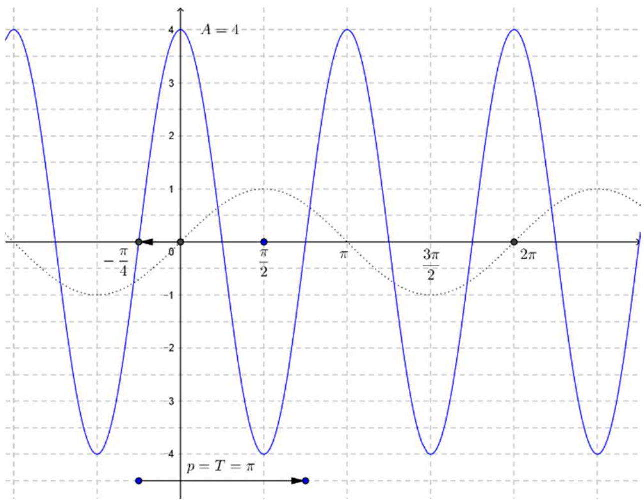


(1) beschreibt die Auslenkung y eines elastischen Federpendels. Die maximale Auslenkung A aus der Ruhelage heisst Amplitude, ω Kreisfrequenz, φ Phase
Die Periodendauer $p = \frac{2\pi}{\omega}$ wird als Schwingungsdauer T bezeichnet. Zwischen Frequenz f, Kreisfrequenz ω und Schwingungsdauer T besteht die Beziehung:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \left(f = \frac{1}{T}\right)$$

Die Sinusschwingung beginnt zur Zeit $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$
(sogenannte Phasenverschiebung).
Für $\varphi > 0$ ist die Kurve auf der Zeitachse nach links,
für $\varphi < 0$ nach rechts verschoben.

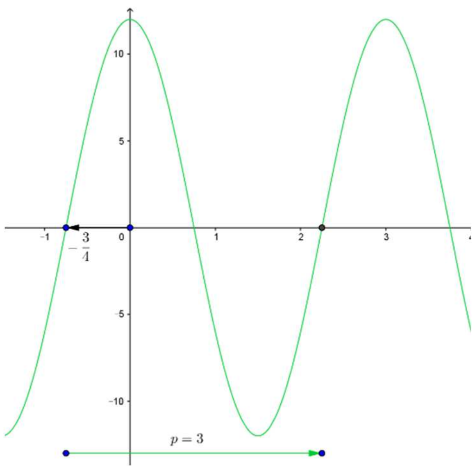
Abbildung:



$y(t) = 4 \cdot \sin(2t + \frac{\pi}{2}) = 4 \cdot \sin(2 \cdot (t + \frac{\pi}{4}))$
$t \geq 0$ in s, $y(t)$ in cm

Amplitude: $A = 4$
Kreisfrequenz: $\omega = 2$,
Schwingungsdauer: $T = p = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$
Phasenverschiebung: $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega} = -\frac{\pi}{4}$

Übungsaufgaben:
1.
Gesucht ist die Schwingungsgleichung, wenn zur Zeit t = 0 mit maximaler Auslenkung A = 12 cm gestartet wird und die Schwingungsdauer T = 3 Sekunden beträgt.



Lösung:
Amplitude: $A = 12$
Kreisfrequenz: $\omega = {}^{2\pi}/_{3}$, Schwingungsdauer:
$T = p = \frac{2\pi}{\omega} = 3$
Phasenverschiebung: $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega} = -\frac{3}{4}$
$y(t) = 12 \cdot \sin(\frac{2\pi}{3} t + \frac{\pi}{2})$

2.
Ein Riesenrad hat einen Durchmesser von 60 m, seine Achse liegt 35 m über dem Boden. Es dreht sich einmal in 4 Minuten. Eine Person nimmt zur Zeit t = 0 in einer Gondel Platz.

a)
Wie hoch ist sie über dem Boden zur Zeit t in Minuten.
b)
Wann befindet sie sich zum ersten und zum zweiten Mal auf der Höhe 50m?

a) $y(t) = 35 + 30 \cdot \sin(\frac{\pi}{2} \cdot (t-1))$
b) $y(t) = 35 + 30 \cdot \sin(\frac{\pi}{2} \cdot (t-1))$ =50
$\sin(\frac{\pi}{2} \cdot (t-1)) = \frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2} \cdot (t-1) = \frac{\pi}{6}$ oder $\frac{\pi}{2} \cdot (t-1) = \frac{5\pi}{6}$

a) $y(t) = 35 + 30 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (t-1)\right)$
b) $y(t) = 50$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (t-1)\right) = \frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2} \cdot (t-1) = \frac{\pi}{6}$ oder $\frac{\pi}{2} \cdot (t-1) = \frac{\pi}{6}$
t_1 = 1‘20‘‘ oder t_2 = 2‘40‘‘

3..
Die Gezeiten (Ebbe und Flut) verlaufen mit einer Periode von etwa 12.5 Stunden. Der Tidenhub (Höhenunterschied zwischen Höchststand und Tiefstand) beträgt in der englischen Hafenstadt Hull 7m.
a)
Wie kann die Abweichung in Metern vom mittleren Wasserstand H(t) beschrieben werden, wenn angenommen wird, dass der Verlauf des Wasserspiegels sinusförmig ist?
b)
Wieviele Meter über dem Tiefstand steht der Meeresspiegel 8 Stunden nach dem Höchststand?

a)
$y(t) = 3.5 \cdot \sin(\frac{4\pi}{25} \cdot (t + \frac{12.5}{4}))$
b)
$y(8) = 3.5 \cdot \sin(\frac{4\pi}{25} \cdot (8 + \frac{12.5}{4})) \approx -2.23$
etwa 1.3 Meter über dem Tiefststand.

d).
Die wissenschaftlich nicht fundierte Theorie der Biorhythmen (?)

Die sogenannten gedämpften Schwingungen werden später untersucht
(→Analysis2→Differentialgleichungen.

Es folgt ein Beispiel dazu:

Beispiel für den Verlauf einer gedämpften Schwingung:
$f(t) = 3 \cdot e^{-\frac{t}{10}} \cdot \sin t$
Der Graph der Funktion verläuft zwischen den Kurven $y = 3 \cdot e^{-\frac{t}{10}}$ und $y = -3 \cdot e^{-\frac{t}{10}}$ (die Berührpunkte sind nicht die lokalen Maxima bzw. Minima).