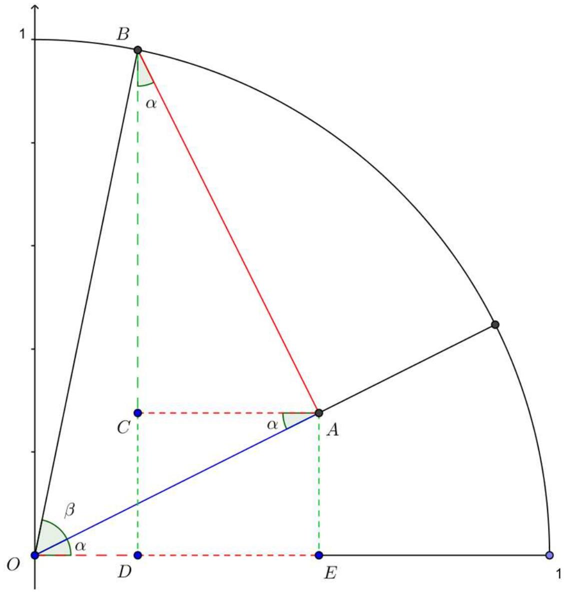
10. Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen (Goniometrie)

Das Problem:
Die trigonometrischen Funktion wachsen nicht linear:

$\sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$ z.B. $\sin(30° + 60°) \neq \sin 30° + \sin 60°$
$\sin(2\alpha) \neq 2\cdot\sin\alpha$ z.B. $\sin(2\cdot 45°) \neq 2\cdot\sin 45°$

Wie heisst es richtig?

Herleitung:



$\overline{OA} = \cos\beta$
$\overline{AB} = \sin\beta$
$\overline{BD} = \sin(\alpha + \beta)$
$\overline{OD} = \cos(\alpha + \beta)$
$\overline{BC} = \overline{AB}\cdot\cos\alpha = \cos\alpha\cdot\sin\beta$
$\overline{AE} = \overline{OA}\cdot\sin\alpha = \sin\alpha\cdot\cos\beta$
$\overline{OE} = OA\cdot\cos\alpha = \cos\alpha\cdot\cos\beta$
$\overline{DE} = \overline{AC} = \overline{AB}\cdot\sin\alpha = \sin\alpha\cdot\sin\beta$
$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AE}$
$\overline{OD} = \overline{OE} - \overline{DE} = \overline{OE} - \overline{AC}$

Damit gilt:

(1)	$\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}$
(2)	$\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Beispiel:
$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)$ $\cos 75° = \frac{1}{4}\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)$

(1') und (2') ergeben sich, indem man in (1) und (2) β durch -β ersetzt und beachtet, dass $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$ und $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$:

(1')	$\boldsymbol{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta}$
(2')	$\boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta}$

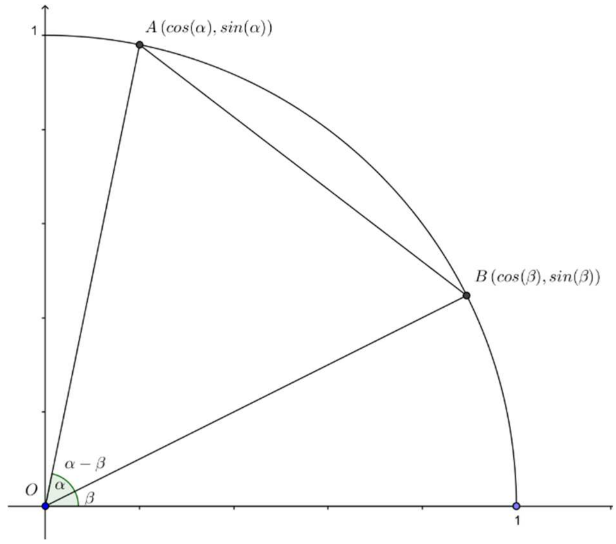
Aufgabe:
Es ist $\sin(\alpha + \beta)$ direkt aus $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ (α spitz) und $\sin\beta = = \frac{7}{25}$ (β stumpf) zu berechnen.
Wegen $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ gilt $|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{4}{5}$ und damit $\cos\alpha = \frac{4}{5}$
bzw. $\cos\beta = -\frac{24}{25}$ und schliesslich $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{44}{125}$

Übungsaufgabe:
Es ist $\cos(45° + \alpha) + \cos(45° - \alpha)$ zu vereinfachen.

Lösung: $\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$

Herleitungsvarianten:

a) mit dem Cosinussatz
Im Einheitskreis sind die Punkte
A(cos α, sin α) und B(cos β, sin β)
gegeben.



Idee:
Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ wird auf zwei verschiedene Arten berechnet:

Mit dem Cosinussatz:
$\overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2 - 2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos(\alpha - \beta)$
$\overline{AB}^2 = 2 - 2\mathbf{\cos(\alpha - \beta)}$

Mit der Abstandsformel
$\overline{AB}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$
$\overline{AB}^2 = 2 - 2\cdot\mathbf{(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta)}$
und damit **(2')**
Ersetzt man α durch 90° - α so erhält man wegen cos((90° - α) - β) = sin (α + β) **(1')** aus **(2')**

b) mit dem Skalarprodukt durch Berechnung des Zwischenwinkels der Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$

Das Tangenstheorem

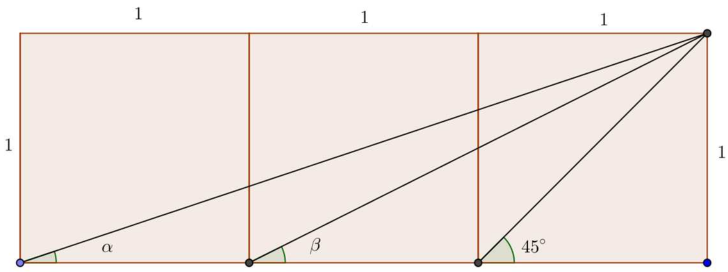
Wegen $\tan\gamma = \dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$ gilt:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \pm \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \mp \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

Der Zähler und der Nenner wurde durch cos α·cosβ dividiert mit dem Ergebnis

(3) $$\boxed{\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}}$$

Aufgabe
Es ist zu zeigen, dass in der Abbildung gilt: $\alpha + \beta = 45°$



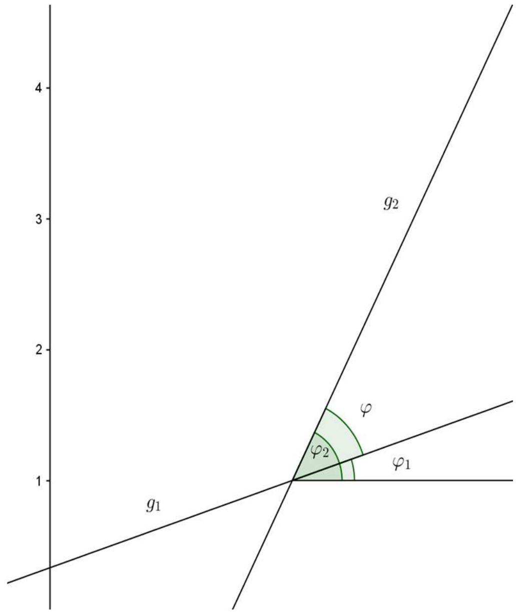
Beweis:
$\tan\alpha = \frac{1}{3}$, $\tan\beta = \frac{1}{3}$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1 \;\square$$

Anwendung:.

Gegeben sind zwei Geraden mit den Steigungen $m_1 = \tan\varphi_1$ und $m_2 = \tan\varphi_2$

Gesucht ist der Winkel, um den man g_1 im positiven Sinn drehen muss bis g_1 mit g_2 zusammenfällt.



$$\tan\varphi = \tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1}{1 + \tan\varphi_2 \tan\varphi_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad (*)$$

Winkel φ zwischen zwei Geraden g_1 und g_2 mit den Steigungen m_1 und m_2

Interessiert der spitze Winkel, so gehe man in (*) zum Betrag über.

Beispiel:
Die Geraden in der Skizze haben die Gleichungen:
g_1: $y = 2x - 3$ g_2: $x - 3y + 1 = 0$
und damit die Steigungen $m_1 = 2$ bzw. $m_2 = \frac{1}{3}$

als Steigungswinkel ergibt sich nach (*):

$$\tan\varphi = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = 1 \text{ und damit } \varphi = 45°$$

Übungsaufgabe :
Gegeben sind die zwei Geraden
g_1: A(0,2) B(4,0) g_2: $2x - 3y + 3 = 0$
In welchem Punkt S und unter welchem spitzen Winkel φ schneiden sich die beiden Geraden?

g_1: $m_1 = -\frac{1}{2}$
g_2: explizite Form: $y = \frac{2}{3}x + \rightarrow$ $m_2 = \frac{2}{3}$
$\tan\varphi = = \frac{9}{4}$ $\quad \varphi \approx 60.26°$

ein wichtiger Spezialfall: $\varphi = 90°$ $\quad$ $\mathbf{m_1 \cdot m_2 = -1}$

Satz:
Stehen zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 aufeinander senkrecht, dann gilt:
$\mathbf{m_1 \cdot m_2 = -1}$

Doppelte Winkel

Setzt man in den Additionstheoremen für $\beta = \alpha$, so erhält man

(4.1) $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
(4.2) $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

Bemerkung:

Die Formeln gelten für beliebige Winkel! z.B. $\sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Ein Extremalproblem:
Die beiden Schenkel s eines gleichschenkligen Dreiecks schliessen den Winkel φ ein. Für welche Wahl von φ wird der Inhalt I des Dreiecks maximal?

$I = \frac{1}{2}s^2 \cdot \sin(2\varphi)$ wird maximal für $\varphi = 45°$

Eine Anwendung in der Physik: Maximale Wurfweite beim schiefen Wurf.

Übungsaufgaben:

Die folgenden Aussagen sind zu beweisen:

1.
$$\frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha} = \cos(2\alpha)$$

2.
$sin(3\alpha) = 3sin\ \alpha - 4\ sin^3\alpha$ bzw. $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\ \cos\alpha$
Tipp: $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ und Additionstheoreme anwenden
a)

3.
$$\frac{1-\cos(2\alpha)}{\tan\alpha} = \sin(2\alpha)$$

4.
$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{2}{\sin(2x)}$$

5.
$$\frac{\sin(2\alpha)}{2-2\sin^2\alpha} = \tan\alpha$$

6.
$2\cos^2(45° + \frac{\alpha}{2}) = 1 - \sin\alpha \quad 2\sin^2(45° - \frac{\alpha}{2}) = 1 + \sin\alpha$

Rationalisierungsformeln

Diese Formeln werden z.B. in der Integralrechnung gebraucht

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \text{mit} \quad t = \tan\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

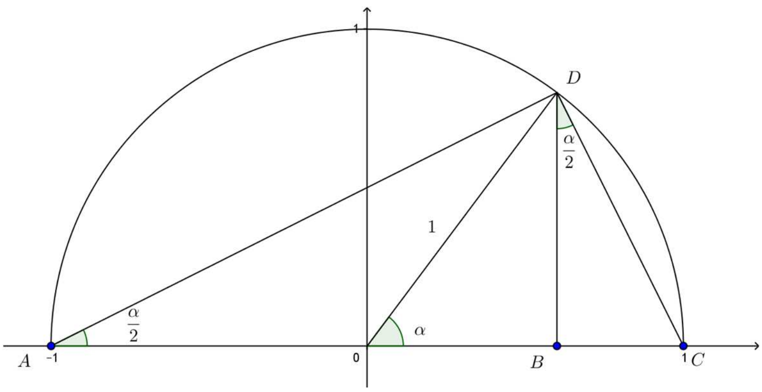
Beweis:
Beim Beweis werden die folgenden Beziehungen verwendet:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\frac{2t}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 2\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\alpha$$

Halbe Winkel



$\overline{AO} = \overline{OC} = 1$
$\overline{OB} = \cos\alpha$
$\overline{BD} = \sin\alpha$
BC = 1- cos α

Damit gilt im Dreieck ABD:

$$\boxed{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

und im Dreieck DBC:

$$\boxed{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

weitere Formeln → FuT

Umformung von Summen in Produkte

Ausgehend von den Formeln 1) und 1´)

$\sin(\gamma + \delta) = \sin\gamma \cdot \cos\delta + \cos\gamma \cdot \sin\delta$
$\sin(\gamma - \delta) = \sin\gamma \cdot \cos\delta - \cos\gamma \cdot \sin\delta$

führt die folgende Substitution:
$\gamma + \delta = \alpha \qquad \gamma - \delta = \beta$
auf
$\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \quad \delta = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ womit gilt:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

weitere Formeln →FuT

Diese Formeln können in der Differentialrechnung etwa bei der Herleitung der Ableitung von trigonometrischen Funktionen gebraucht werden. Eine weitere Anwendung ergibt sich auch in der Physik bei der Überlagerung von Sinusschwingungen.

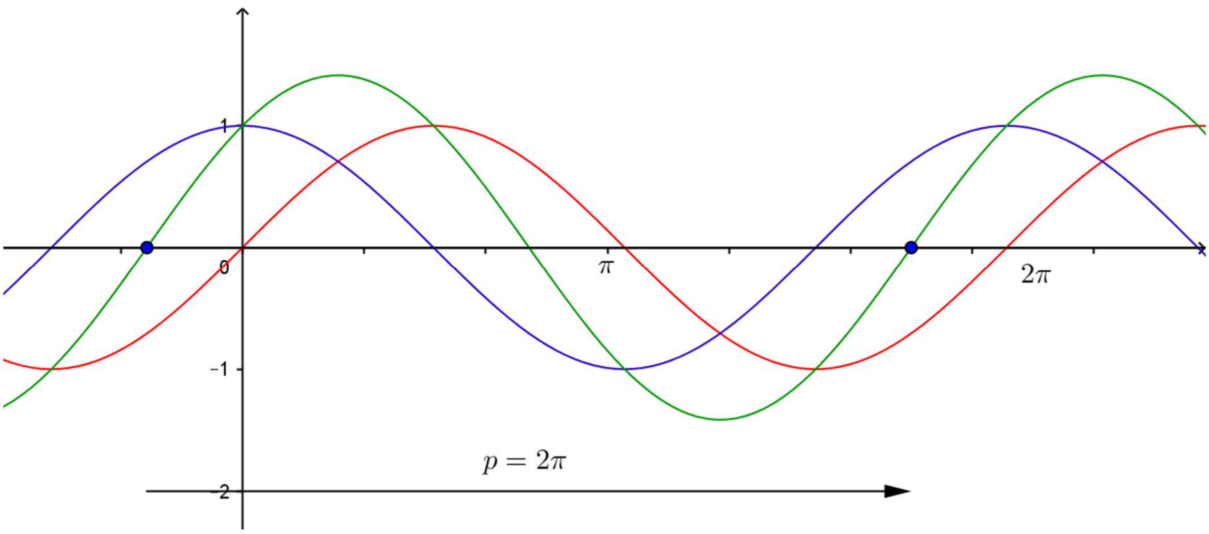
Dazu folgen zwei Beispiele:

Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen mit gleicher Frequenz

Die Überlagerung von $y = sin\ t$ (rot) und $y = cos\ t$ (blau) führt auf
$y = \sqrt{2}\cdot\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ (grün)

Beweis:
$\sin t + \cos t = \sin t + \sin(t+\frac{\pi}{2}) = 2\cdot\sin(t+\frac{\pi}{4})\cdot\cos(-\frac{\pi}{4})$

$= 2\cdot\sin(t+\frac{\pi}{4})\cdot\cos(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$



Es kann allgemein gezeigt werden, dass gilt:

Satz:
Die Superposition zweier harmonischer Schwingungen mit gleicher Frequenz ist wieder eine harmonische Schwingung mit derselben Frequenz.

Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen mit ungleicher Frequenz

Schwebungen:

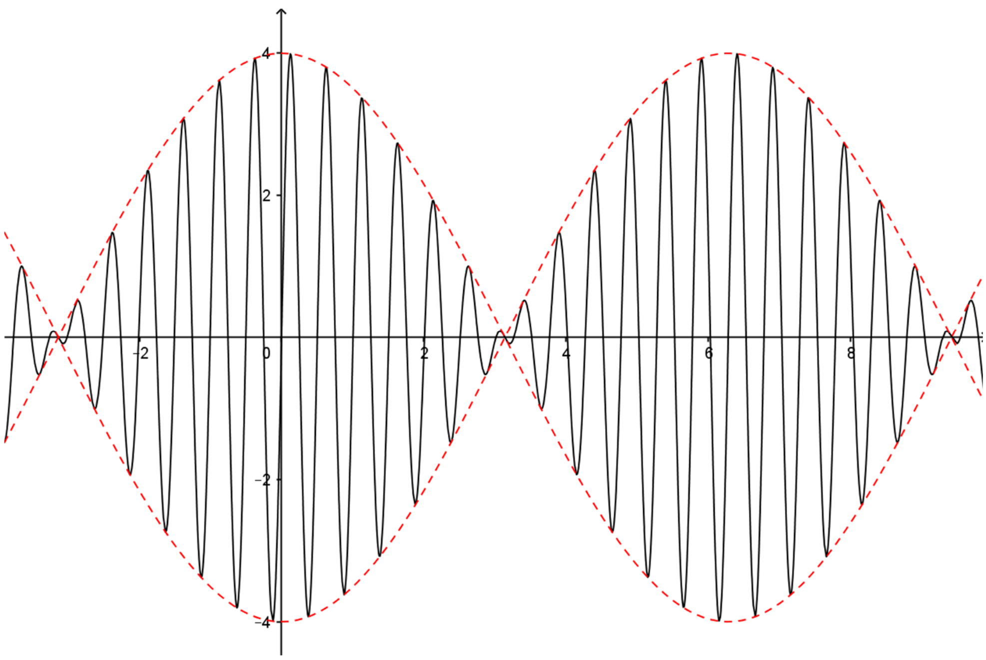
$$y = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2\cos(\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\cdot t)\cdot\sin(\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\cdot t)$$

Der erste Faktor kann als sich zeitlich verändernde Amplitude mit der Periode $\frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$, der zweite Faktor als Schwingung mit der Periode $\frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$ aufgefasst werden

Sind die beiden Frequenzen ungefähr gleich so entsteht wie im folgenden Beispiel eine sogenannte **Schwebung**:

Beispiel:

$$y = \sin(12t) + \sin(13t) = 2\cos(\tfrac{1}{2}\cdot t)\cdot\sin(\tfrac{25}{2}\cdot t)$$



Übungsaufgaben:

Es sind die folgenden Beziehungen nachzuweisen:

a)

sin 20° + sin 40° = sin 80°

b)

cos α + cos(α+ 120°) + cos(α+ 240°) = 0

Tipp: den 1. und den 3. Summanden zusammenfassen.
Viele Herleitungen der Formeln in diesem Abschnitt vereinfachen sich, wenn die komplexen Zahlen bekannt sind.