11. Trigonometrische Gleichungen

In diesem Abschnitt werden trigonometrische Gleichungen behandelt, die explizit lösbar sind. Falls eine explizite Lösung nicht möglich ist, stehen Näherungsverfahren zur Verfügung.

a) **Typ „Ausklammern“**

Hin und wieder führt wie im folgenden Beispiel die Anwendung von Grundbeziehungen oder Additionstheorem zur Lösung:

$\sin(2x) - \cos x = 0$

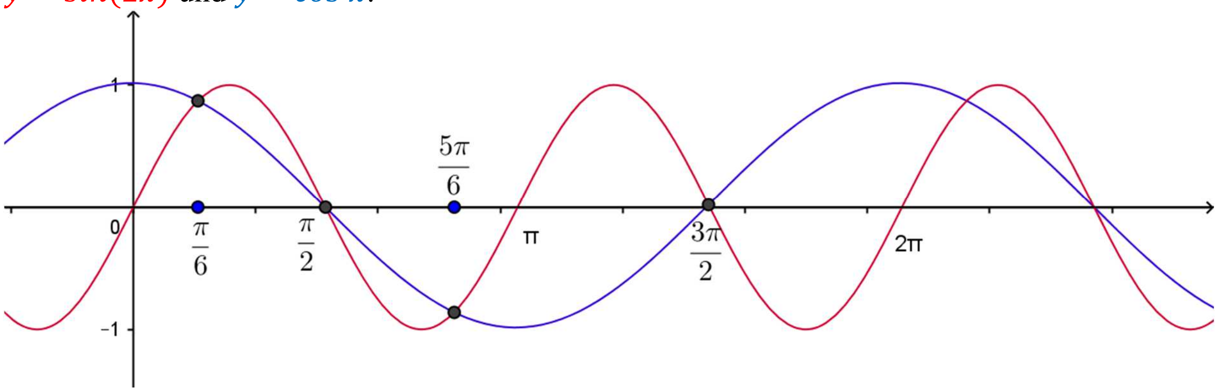
$2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \cos x = 0$

$\cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0$ Ausklammern

$\cos x = 0$ Lösungen: 90°, 270°

$sin\ x = \frac{1}{2}$ Lösungen: 30°, 150°

Graphische Lösung:
Die Lösungen ergeben sich als die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Kurven
$y = sin(2x)$ und $y = cos\ x$.



b) **Typ „Quadratische Gleichung“**

$cos\ x + cos\ (2x) = 0$

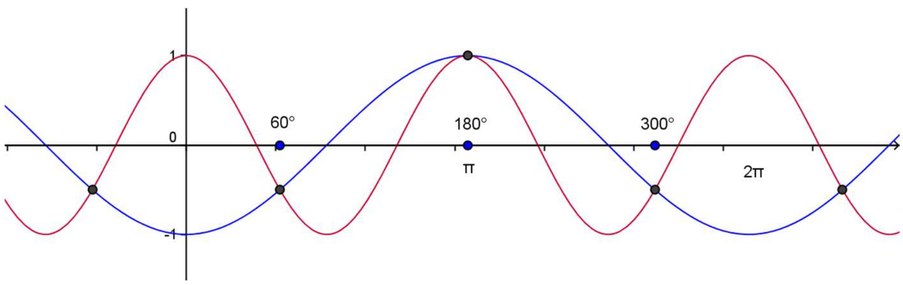
$cos\ x + 2\,cos^2 x - 1 = 0$ Substitution $u = cos\ x$

$2u^2 + u - 1 = (2u - 1)\cdot(u + 1) = 0$

$u_1 = \frac{1}{2}$ $x_1 = 120°$ $x_2 = 240°$

$u_2 = -1$ $x_3 = 180°$u2 = -1

Graphische Lösung:
Die Lösungen ergeben sich als die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Kurven
y = cos(2x) und y = - cos x.



c) **Typ**: $\boldsymbol{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + c = 0}$

Spezialfall c = 0
$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$
Die x-Werte mit $\cos x = 0$ kommen als Lösungen nicht in Frage, denn für diese ist $\sin x \neq 0$. Die Gleichung kann deshalb durch $\cos x$ dividiert werden.
Die Lösungen ergeben sich damit aus der Gleichung
$\tan x = -\frac{b}{a}$

Beispiel.
$\sin x = 2\cos x \qquad \tan x = 2$
$x_1 \approx 63.2°, x_2 = x_1 + 180° \approx 243.2°$

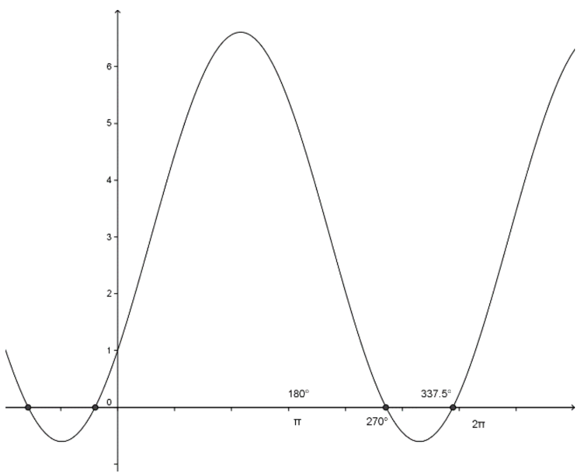
Allgemeiner Fall:
Zunächst ist zu prüfen, ob $x = 180°$ eine Lösung der Gleichung ist.
Mit den sogenannten Rationalisierungformeln kann die Gleichung in eine quadratische Gleichung übergeführt werden.
Mit $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ muss gelten:

$$a \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + c = 0$$
$$2at + b \cdot (1-t^2) + c \cdot (1-t^2) = 0$$

Beispiel:
$3\sin x - 2\cos x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 5t^2 + 6t + 1 = 0$

$t_1 = -\frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad x_1 = 2 \cdot \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) \approx 337.5°,$
$t_2 = -1 \quad \rightarrow \quad x_2 = 270°$

Grafische Lösung:
In der Abbildung ergeben sich die Lösungen als Nullstellen der Funktion $f(x) = 3\sin x - 2\cos x + 3$



Übungsaufgabe:
$2\cos x - \sin x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 + t - 2 = 0$

Lösungen: $x_1 = 90°, x_2 = 240°$

Viele trigonometrische Gleichungen sind nur durch Näherungsverfahren lösbar.

d) Der **Bisektionsalgorithmus** (Intervallhalbierung)

Es handelt sich um ein Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen einer Gleichung f(x) = 0.

Voraussetzung:
f ist stetig im Intervall $[a, b]$ und $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$
f hat also an den Intervallgrenzen verschiedene Vorzeichen. Gegebenenfalls kann die Gleichung mit (-1) multipliziert werden.

Nach dem Zwischenwertsatz hat dann f mindestens eine Nullstelle im Innern des Intervalls d.h. der Graph von f schneidet mindestens einmal die x-Achse.
Die Lösung wird nun schrittweise durch Halbieren des Intervalls angenähert.

Bisektionsalgorithmus (nach Gander):

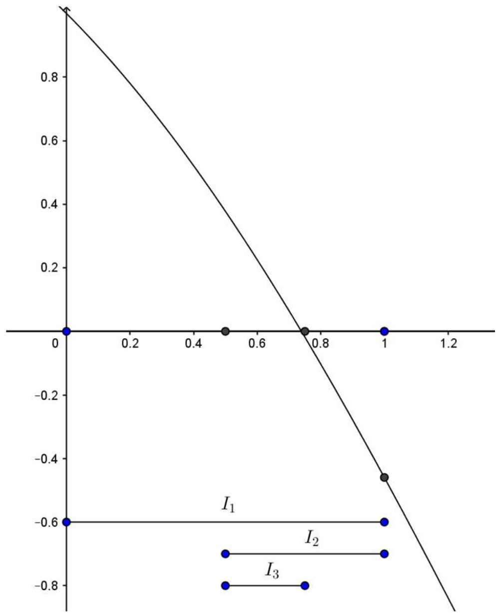
x := (a + b)/2	bestimme die Intervallmitte
while (b - a) > ε do	tue solange die gewünschte Genauigkeit nicht
begin	erreicht ist (*)
if f(x) > 0 then b := a else a := x	Wahl des nächsten Intervalls
x := (a + b)/2	neue Intervallmitte
end.	

(*) Verbesserte Abbruchbedingung:
while (a < x) and (x < b)

Illustration am Beispiel cos x = x
$f(x) = \cos x - x$

Die Voraussetzung ist im Intervall [0,1] erfüllt.

Die Gleichung hat die Lösung x = 0.73908513…



n	a	b	f(a)	f(b)	m	f(m)	
	untere Grenze	obere Grenze	positiv	negativ	Mitte		Intervallbreite
0	0	1	1.000000000	-0.459697694	0.5	0.377582562	1.00000000
1	0.5	1	0.377582562	-0.459697694	0.75	-0.018311131	0.50000000
2	0.5	0.75	0.377582562	-0.018311131	0.625	0.185963120	0.25000000
3	0.625	0.75	0.185963120	-0.018311131	0.6875	0.085334946	0.12500000
4	0.688	0.7500	0.085334946	-0.018311131	0.71875	0.033879372	0.06250000
28	0.73908513	0.73908513	0.000000005	-0.000000002	0.73908513	0.000000002	0.00000000
29	0.73908513	0.73908513	0.000000002	-0.000000002	0.73908513	0.000000000	0.00000000
30	0.73908513	0.73908513	0.000000000	-0.000000002	0.73908513	-0.000000001	0.00000000
31	0.73908513	0.73908513	0.000000000	-0.000000001	**0.73908513**	0.000000000	0.00000000

e) **Gleichungen der Form g(x) = x**

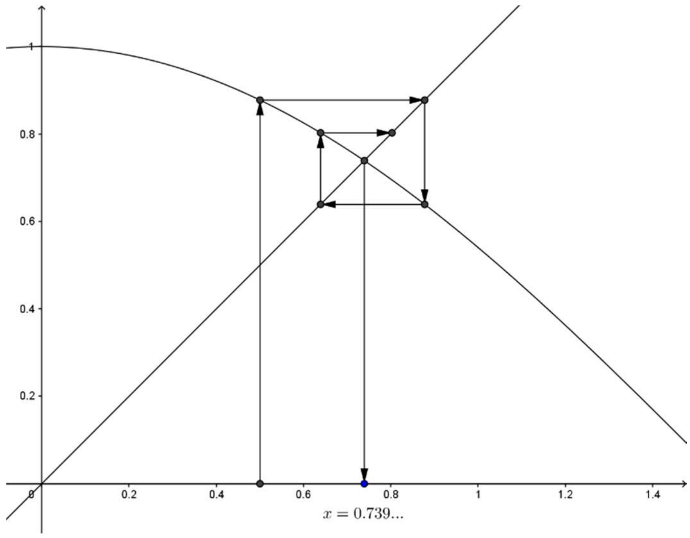
Unter Iteration versteht man einen Rechenvorgang, der sich ständig wiederholt, wobei die gesuchte Lösung schrittweise besser angenähert wird.

Illustration des Verfahrens am gleichen Beispiel $\cos x = x$:

In der Abbildung sind die Kurven $y = \cos x$ und $y = x$ dargestellt.

Zuerst wird ein Startwert gewählt
z.B: $x_1 = 0.5$
Anschliessend berechnet man schrittweise
$x_{k+1} = \cos x_k$
$x_1 = 0.5.$
$x_2 = \cos(0.5) = 0.877 \ldots$
$x_3 = \cos(0.877 \ldots) = 0.639 \ldots$
…
Nach mehrfachem Drücken der Cosinustaste nähert sich Wert schliesslich

x = 0.739085133



Die Annäherung kann in der Abbildung verfolgt werden. Es entsteht ein spiralförmiger Streckenzug der sich dem Grenzpunkt, dem Schnittpunkt der beiden Kurven immer mehr nähert.

Im Abschnitt → Numerische Verfahren wird gezeigt, dass dieses Verfahren konvergiert, wenn der Graph der Funktion nicht steiler als die Winkelhalbierende steigt bzw. fällt.