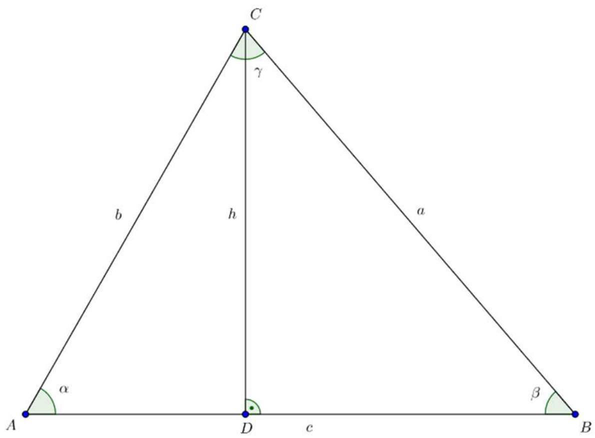
Der Sinussatz

Die Berechnung von spitz- oder stumpfwinkligen Dreiecken kann nach dem Sinus- bzw. Cosinussatz erfolgen. Der Sinussatz kann angewendet, wenn zu einer Seite auch der Gegenwinkel bekannt ist. Seine Herleitung ergibt sich bei der Lösung der folgenden

1. Grundaufgabe WSW:
Berechnung eines (zunächst spitzwinkligen) Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln.

Gegeben.: b, α, β Gesucht.: a, c, γ.

Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt:



$$h = b \sin \alpha$$

$$\frac{h}{a} = \sin \beta \qquad a = \frac{h}{\sin \beta} = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} \qquad (1)$$

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

analog $c = \dfrac{b \sin \gamma}{\sin \beta}$

Die aus (1) folgende Aussage heisst

Sinussatz (1. Formulierung) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ oder $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin \beta}{\sin \gamma}$

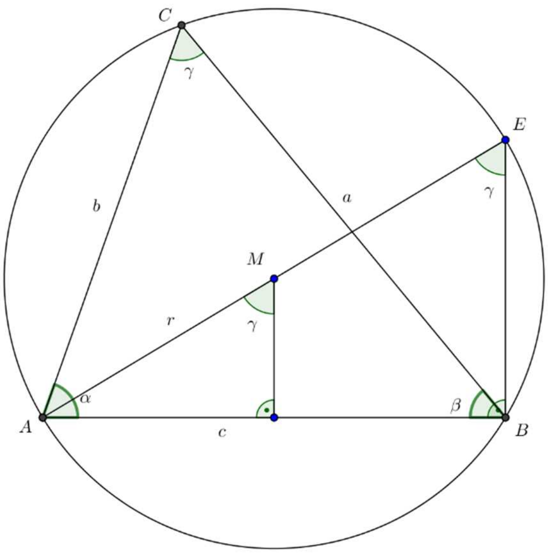
In einem Dreieck verhalten sich zwei Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel.

Bemerkung:
Der Sinussatz gilt wegen $sin\,(180° - \alpha) = sin\,\alpha$ auch für stumpfwinklige Dreiecke

Numerisches. Beispiel:

$b = 38.4 \qquad \alpha = 67.4° \qquad \beta = 72.2°$
$\gamma \approx 40.4° \qquad a \approx 37.2 \qquad c \approx 26.1$

Im rechtwinkligen Dreieck ABE gilt:
$\frac{c}{2r} = \sin\gamma$ oder $\frac{c}{\sin\gamma} = 2r$



Sinussatz (2. Formulierung)
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$

Herleitungsvariante:
Für die doppelte Dreiecksfläche gilt:
$ah_a = bh_b = ch_c$ dividiert durch abc

$$\frac{ah_a}{abc} = \frac{bh_b}{abc} = \frac{ch_c}{abc}$$

$$\frac{h_a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{h_b}{c} \cdot \frac{1}{a} = \frac{h_c}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

und daraus die Behauptung.

Übungsaufgabe:
Von einem Dreieck ABC kennt man die Seite a = 15 cm und die Winkel α = 35° und β = 50°.
Gesucht ist die Seite b.

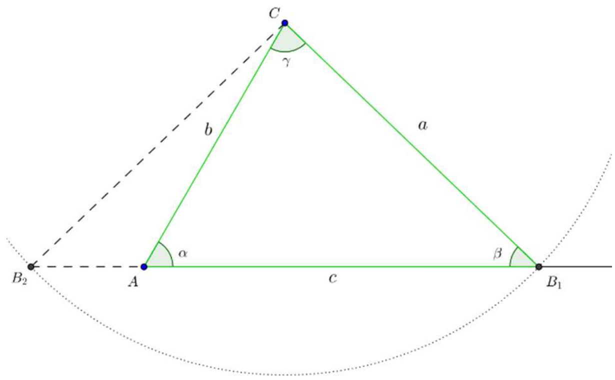
Lösung: b = 20 cm

2. Grundaufgabe:
Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel einer dieser Seiten (SSW).

Der Fall eines gleichschenkligen Dreiecks wurde bereits früher besprochen. Es verbleiben also noch die folgenden beiden Fälle:

1. Fall: Der Gegenwinkel der grösseren Seite ist gegeben.

Abbildung: $a = 5 \;>\; b = 4 \;\; \alpha = 60°$.



Da der kleineren Seite der kleinere Winkel gegenüberliegt, ist β ein spitzer Winkel.

Der Kreis um C mit Radius a schneidet die Gerade der Seite c in zwei Punkten B_1 und B_2, aber nur B_1 liefert eine Lösung mit spitzem Winkel β, weil das zweite Dreieck AB_2C nicht den Winkel α, sondern den Winkel 180° - α enthält.

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \qquad \sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} \quad (*) \quad \beta = \arcsin\left(\frac{b\sin\alpha}{a}\right)$$

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \qquad c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

β ist spitzwinklig, denn der kleineren Seite liegt der kleinere Winkel gegenüber

Bemerkung zu (*):
Zu einem gegebenen Sinuswert gehört ein spitzer Winkel α und ein stumpfer Winkel 180° - α. Kann der stumpfe Winkel nicht ausgeschlossen werden, dann ist die Berechnung des grössten Winkels mit dem Sinussatz zu vermeiden.

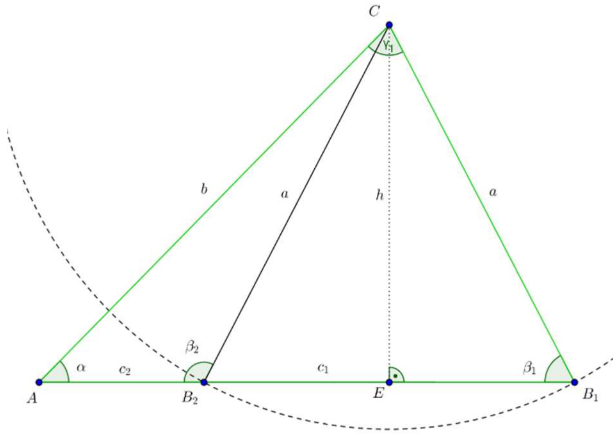
Lösungsdreieck: $\beta \approx 43.9°$ $\quad \gamma \approx 76.1°$ $\quad c \approx 5.60$

Übungsaufgabe:
$a = 57.7 \qquad b = 44.8 \qquad \alpha = 69.7°$

Lösung:
$\beta \approx 46.7° \qquad \gamma \approx 63.6° \qquad c \approx 55.1$

2. Fall: Der Gegenwinkel der kleineren Seite ist gegeben.

Abbildung: $a = 4.00 < b = 5.00$, $\alpha = 45.0°$



Geometrische Lösung:
Der Kreis um C mit Radius a kann die Gerade der Seite c schneiden, berühren oder meiden.
Entsprechend können drei Fälle auftreten:

1) $a > h$ 2 Lösungen
2) $a = h$ 1 Lösung
3) $a < h$ keine Lösung

Rechnerische Lösung:
Nach dem Sinussatz gilt: $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} = \dfrac{h}{a}$

1) Ist $a > h$, dann ist $\sin\beta < 1$ und es gibt eine spitze und eine stumpfe Lösung.
2) Ist $a = h$, dann ist $\sin\beta = 1$ und das Lösungsdreieck ist rechtwinklig
3) Ist $a < h$, dann ist $\sin\beta > 1$ und es gibt keine Lösung.

1. Lösung: $\beta_1 \approx 62.1°$ $\gamma_1 \approx 72.9°$ $c_1 \approx 5.41$
2. Lösung $\beta_2 \approx 117.9°$ $\gamma_2 \approx 17.1°$ $c_2 \approx 1.66$

Variante:
Diese Aufgabe kann später auch mit dem → Cosinussatz gelöst werden. In diesem Fall führt dies auf eine quadratische Gleichung. Der Wert der Diskriminante bestimmt die Anzahl der Lösungen.

> Der Sinussatz kann angewendet werden, wenn eine Seite und der gegenüberliegende Winkel gegeben ist. In den übrigen Fällen wendet man den folgenden Cosinussatz an.

Satz:
Im Dreieck teilt eine Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

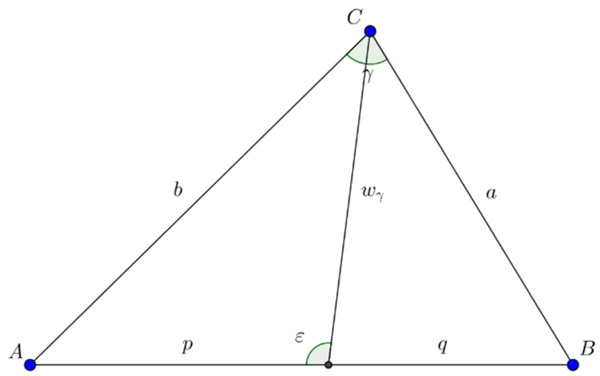
Beweis:
Die Winkelhalbierende w_γ teilt die gegenüberliegende Seite in zwei Teilstrecken p und q.
Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\frac{p}{q} = \frac{b}{a}$$

In den beiden Teildreiecken gilt nach dem Sinussatz:

$$\frac{p}{\sin(\frac{\gamma}{2})} = \frac{b}{\sin\varepsilon} \text{ bzw.}$$

$$\frac{q}{\sin(\frac{\gamma}{2})} = \frac{a}{\sin(180° - \varepsilon)} = \frac{a}{\sin\varepsilon}.$$



Die Behauptung ergibt sich, indem man die linke und die rechte Seite der beiden Gleichungen durcheinander dividiert.

Beweisvarianten:
a) Anwenden des Flächensatzes auf die beiden Teildreiecke

$2F_1 = a \cdot w \cdot \sin(\frac{\gamma}{2}) = p \cdot h$ bzw. $2F_2 = b \cdot w \cdot \sin(\frac{\gamma}{2}) = q \cdot h$

Division der beiden Seiten ergibt:

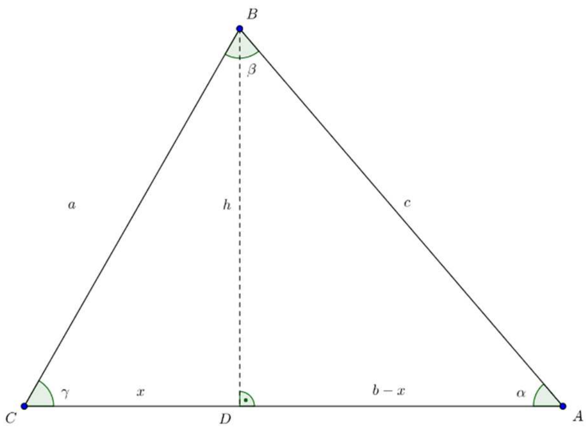
$$\frac{p \cdot h}{q \cdot h} = \frac{b \cdot w_\gamma \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{a \cdot w_\gamma \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

b) Beweis mit den Strahlensätzen (→Geometrie)

Der Cosinussatz (Verallgemeinerter Pythagoras)

Der Cosinussatz ermöglicht die Lösung der beiden übrigen Grundaufgaben. Er ergibt sich bei der Lösung der folgenden

3. Grundaufgabe:
Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten a und b und dem eingeschlossenen (zunächst spitzen) Winkel γ (SWS).



Δ BDA

$$c^2 = h^2 + AD^2 = h^2 + (b-x)^2$$
$$= h^2 + x^2 + b^2 - 2bx$$

wegen $x = a\cos\gamma$ folgt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \qquad (*)$$

Nach dem Sinussatz ergibt sich

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c} \rightarrow \alpha$$

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) \qquad b = \frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Es ist empfehlenswert, zunächst den Winkel zu berechnen, welcher der kleineren Seite gegenüber liegt, denn dieser kann nicht stumpf sein.

Numerisches Beispiel:

a = 6.80	b = 9.10	γ = 61.3°

Lösung:

c ≈ 8.34	α ≈ 45.6°	β ≈ 73.1°

Die Aussage (*) heisst:

> **Cosinussatz** (Verallgemeinerter Pythagoras):
>
> $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
>
> In jedem Dreieck ist das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate der andern Seiten vermindert um ein Korrekturglied k. Es besteht aus dem doppelten Produkt der beiden Seiten mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels.

γ = 0°	k = 1	$c = \lvert a - b \rvert$
γ = 90°	k = 0	(Pythagoras)
γ < 90°	k > 0	
γ > 90°	k < 0	
γ = 180°	k = -1	$c = a + b$

Der Cosinussatz gilt auch im stumpfwinkligen Dreieck.

Auf die Bedeutung des Satzes weist ein unverdächtiger Zeuge im folgenden Zeitungsausschnitt der Berner Zeitung hin (23.1.1997).

BRUNO KERNEN

Hahnenkamm als geistige Therapie

Am letzten Samstag stürzte Bruno Kernen am Lauberhorn schwer, gestern meldete sich der Reutiger in Kitzbühel bereits wieder zurück.

Berner Zeitung: *Welcome back. Wie geht's?*
Bruno Kernen: Den Umständen entsprechend sehr gut. Im Bereich des Rückens spüre ich überhaupt keine Schmerzen mehr. Manchmal habe ich noch Kopfweh, vor allem wenn der Puls heraufschnellt.

BZ: *Was auf der Streif sicherlich der Fall sein dürfte.*
Kernen: Eigenartigerweise war es beim Einfahren schlimmer als im Training. Ich fühle mich körperlich so gut, dass ich hier ohne Risiko einen Start wagen kann. Die Untersuchungen sind gut verlaufen. Ich betrachte es auch als eine Art geistige Therapie, hier zu starten. Ich finde es gescheiter als zuhause herumzusitzen und mich zu grämen.

BZ: *Ex-Rennfahrer Walter Vesti sagte einmal nach einem schweren Sturz in der Steilhang-Ausfahrt, ein Abfahrer müsse sich verhalten wie ein Rennpferd: Wenn dieses ein Hindernis werfe, müsse es so schnell wie möglich nochmals darüber. Das gleiche gelte für einen Abfahrer nach einem Sturz.*
Kernen: Das ist auch meine Philosophie. Wichtig ist es, keine mentalen Probleme zu haben und das Selbstvertrauen sofort zurückzugewinnen. Deshalb wollte ich schnellstmöglich wieder fahren. Den sportlichen Aspekt habe ich weggelassen, ich fuhr keine Kurve ‹auf Zug› und rechnete damit, Letzter zu werden. Jetzt bin ich ja immerhin 32. geworden.

BZ: *Haben Sie den Sturz am Lauberhorn schon gesehen?*
Kernen: Ich habe ihn am Samstagabend im «Sport aktuell» angeschaut mit den entsprechenden Kommentaren dazu. Ich war nicht ganz einverstanden mit der Analyse. Ich konnte keinen klaren Fahrfehler ausmachen. Ich bin die gleiche Linie gefahren wie Ghedina und habe offenbar einen Schlag auf die Ski bekommen. Das kann geschehen. Ich hatte Riesenglück.

Als ich nach dem Sturz aufgestanden war, bemerkte ich sofort, dass mir nichts fehlt. Um mein Gehirn zu testen, habe ich den Cosinus-Satz aufgesagt. Als ich den wusste, ist es mir sofort wieder besser gegangen...

Interview: Richard Hegglin

Bruno Kernen taucht schon wieder aus der Versenkung auf nach seinem Sturz am Lauberhorn. *(Bild: Andreas Blatter)*

23. 1. 1997.

BZ

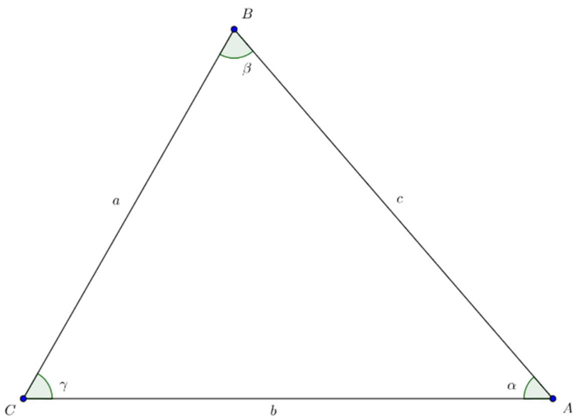
4. Grundaufgabe:
Berechnung eines Dreiecks, von dem 3 Seiten gegeben sind (SSS)

Zunächst wird der Winkel berechnet, welcher der grössten Seite gegenüberliegt, denn nur dieser kann allenfalls stumpf sein.

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a \sin\alpha}{c}\right)$$

$$\beta = 180 - (\alpha + \gamma)$$



Numerisches Beispiel:

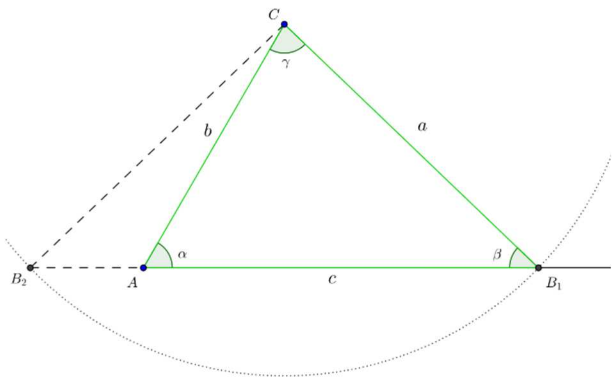
a = 2.94 b = 4.07 c = 5.83

Lösung:
$\gamma \approx 111.5°$ $\alpha \approx 28.0°$ $\beta \approx 40.5°$

Übungsaufgabe:
Die Seiten eines Dreiecks messen a = 14, b = 30 und c = 26. Gesucht ist der Winkel γ.

Lösung: $\gamma = 60°$

Nachtrag:
Lösung der 2. Grundaufgabe mit dem Cosinussatz:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ oder
$c^2 - 2b \cdot \cos\alpha \cdot c - \left(a^2 - b^2\right) = 0$



Die quadratische Gleichung hat die Diskriminante

$$\begin{aligned} D &= (2b \cdot \cos\alpha)^2 + 4 \cdot (a^2 - b^2) \\ &= 4a^2 \cdot (\cos\alpha)^2 - 4b^2 + 4a^2 \\ &= 4a^2 - 4b^2(1 - (\cos\alpha)^2) \\ &= 4a^2 - 4b^2(\sin\alpha)^2 = 4(a^2 - b^2 \cdot sin^2\alpha) \end{aligned}$$

mit den allgemeinen Lösungen:
$c_{1,2} = b \cdot \cos\alpha \pm \sqrt{D}$

1. Fall: $a > b$:
$D = a^2 - b^2 \cdot \sin^2\alpha > b^2 - b^2 \cdot \sin^2\alpha = b^2 \cdot \cos^2\alpha$. Da der Wurzelwert grösser als $|b \cdot \cos\alpha|$ ist, gibt es genau eine Lösung ($c_2 < 0$)

2. Fall: $a = b$:
Es gibt genau eine Lösung $2b \cdot \cos\alpha$ ($c_2 = 0$)

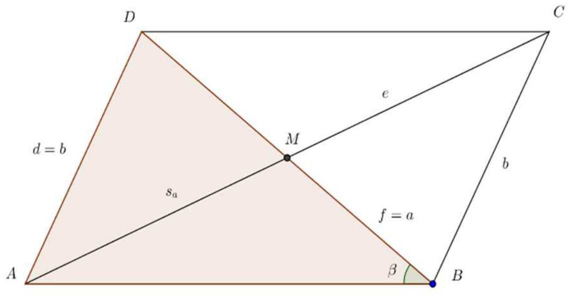
3. Fall: $a < b$
Parallel zu den drei Fällen bei der quadratischen Gleichung gibt es

3a) $D > 0$: zwei Lösungen (auch $c_2 > 0$)
3b) $D = 0$ oder $c = b \cdot \cos\alpha$ (rechtwinkliges Dreieck)
3c) keine Lösung (geometrisch.: die Seite a ist zu kurz)

Numerisches Beispiel für 3b):
$a = 4.00 < b = 5.00 \quad \alpha = 45.0°$
$c_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot \sqrt{2} \pm \sqrt{14})$ $c_2 \approx 1.66$, $c_1 \approx 5.41$

8. Beispiele

Aufgabe:
Gesucht ist eine Formel zur Berechnung der Schwerlinien eines Dreiecks aus den Seiten.



ΔABM: $s_a^{\ 2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - ac \cdot \cos\beta$ (1)

ΔABD: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$ oder

$ac \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$ eingesetzt in (1)

$$s_a^{\ 2} = \frac{a^2}{4} + c^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

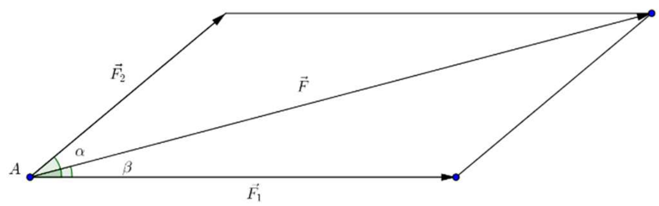
Ergänzt man das Dreieck zu einem Parallelogramm, so erhält man den folgenden:

$$4s_a^2 = e^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$
$$e^2 + a^2 = e^2 + f^2 = 2b^2 + 2c^2$$

> Satz:
> Im Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Seiten gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen.

Aufgabe:
Zwei Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ wirken unter einem Winkel α auf einen Massenpunkt A. Welchen Betrag hat die resultierende Kraft $\vec{F}$ und welchen Winkel schliesst $\vec{F}$ mit $\vec{F_1}$ ein?

$$|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos(180° - \alpha)$$
$$|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha$$



$$|\vec{F}_2|^2 = |\vec{F}|^2 + |\vec{F}_1|^2 - 2|\vec{F}||\vec{F}_1|\cos\alpha_1$$
$$\cos\alpha_1 = \frac{|\vec{F}|^2 + |\vec{F}_1|^2 - |\vec{F}_2|^2}{2|\vec{F}||\vec{F}_1|}$$

Beispiel:
$|\vec{F_1}| = 20$ N $|\vec{F_2}| = 12$ N $\alpha = 40°$
$|\vec{F}| \approx 30.2$ N $\alpha_1 \approx 14.8°$

Übungsaufgabe:
Eine Kraft $\vec{F}$ mit $|\vec{F}| = 100$ N soll in zwei Komponenten $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ zerlegt werden, von denen $\vec{F_1}$ mit $\vec{F}$ einen Winkel $\alpha = 50°$ und $\vec{F_2}$ mit $\vec{F}$ einen Winkel $\beta = 20°$ einschliesst. Welchen Betrag haben die Vektoren $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$?

Lösung: $|\vec{F_1}| = 366.4$ N, $|\vec{F_2}| = 81.5$ N.

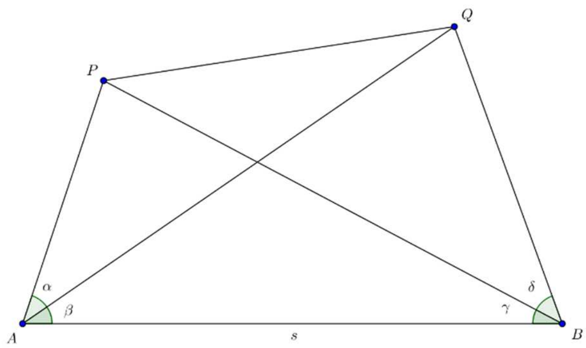
Eine Aufgabe aus der Vermessung: Vorwärtseinschneiden nach zwei Punkten.

Um die Entfernung zweier unzugänglicher Punkte P und Q zu bestimmen, steckt man eine Standlinie $\overline{AB}$ = s =364.7 m ab und misst die Winkel $\alpha = 68.2°$, $\beta = 34.8°$, $\gamma = 29.9°$, $\delta = 80.6°$.

$$\frac{PB}{\sin\alpha} = \frac{s}{\sin(180° - (\alpha+\gamma))} \qquad PB = \frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

$$\frac{BQ}{\sin\beta} = \frac{s}{\sin(180° - (\beta+\delta))} \qquad BQ = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin(\beta+\delta)}$$

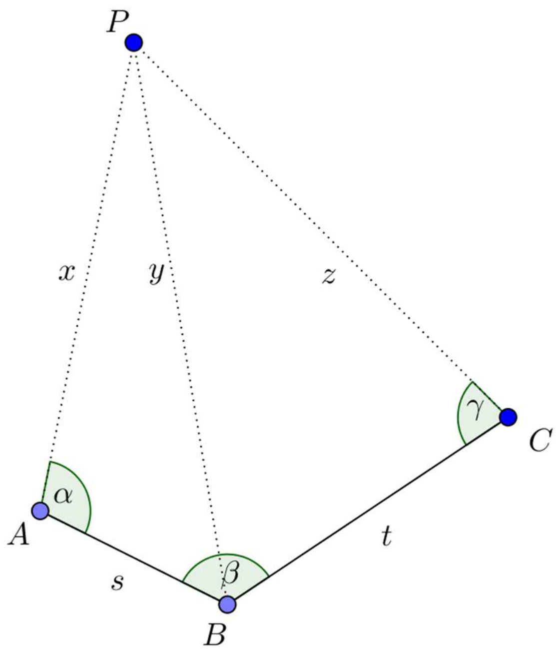
$$PQ^2 = PB^2 + BQ^2 - 2\cdot PB\cdot BQ\cdot\cos(\delta-\gamma)$$



Beispiel:
$\overline{PB}$ = 342.0 m $\overline{BQ}$ = 230.4 m $\overline{PQ}$ = 264.6 m
oder
$\overline{PA}$ = 183.6 m $\overline{AQ}$ = 398.3 m $\overline{PQ}$ = 264.6 m

Übungsaufgabe:

Gegeben sind die Strecken
$\overline{AB} = s = 65\ m$ und $\overline{BC} = t = 85\ m$ und die drei Winkel
α=100.3°, $\beta = 112.4°$ und $\gamma = 85.0°$.
Gesucht sind die Entfernungen der drei Punkte A, B und C vom unzugänglichen Punkt P.

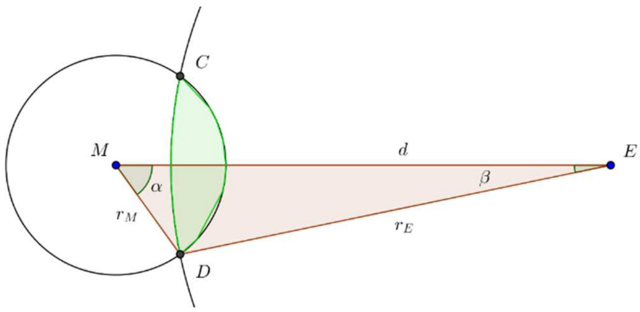


Lösung:
$\overline{AP} = x \approx 118\ m$
$\overline{BP} = y \approx 144\ m$
$\overline{CP} = z \approx 124\ m$

Aufgabe : Partielle Mondfinsternis

Die Abbildung veranschaulicht stark vereinfacht und nicht massstäblich eine partielle Mondfinsternis. Grün dargestellt ist der Schatten S der Erde E auf der Mondscheibe M.

Annahme $r_E = 4 \cdot r_M$ und $d = 4.5 \cdot r_M$.
Welcher Anteil der Mondscheibe wird noch voll von der Sonne beschienen?



Der Schatten besteht aus zwei Kreisabschnittsflächen mit den Zentriwinkeln 2α bzw. 2β.
α mit Cosinussatz im Δ MDE:

$$r_E^2 = r_M^2 + d^2 - 2r_M d \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{r_M^2 + d^2 - r_E^2}{2r_M d}$$

β mit dem Sinussatz im Δ MDE:

$$\frac{r_E}{\sin\alpha} = \frac{r_M}{\sin\beta} \qquad \sin\beta = \frac{r_M \cdot \sin\alpha}{r_E}$$

$r_E = 4 \cdot r_M$ und $d = 4.5 \cdot r_M$ eingesetzt ergibt:
2α = 1.90 (108.63°) und 2β = 0.41 (23.43°).

$$S = \tfrac{1}{2} r_M^2 \cdot (2\alpha - \sin(2\alpha)) + \tfrac{1}{2} r_E^2 \cdot (2\beta - \sin(2\beta)) \approx 0.568 r_M^2$$

Anteil des Schattens bezüglich der Mondfläche:

$\frac{S}{\pi r} \approx 0.18$ Damit werden etwa 82% der Mondscheibe noch von der Sonne beleuchtet.

Übungsaufgabe:
Bei der partiellen Sonnenfinsternis am 20. Mai 1966 in Zürich waren maximal 58.9% des Sonnendurchmessers bedeckt. Wieviel % der Sonnenscheibe waren bedeckt (Sonne und Mond werde als gleich grosse Kreise betrachtet). Lösung : 49.2%.

Eine Aufgabe aus der Astronomie

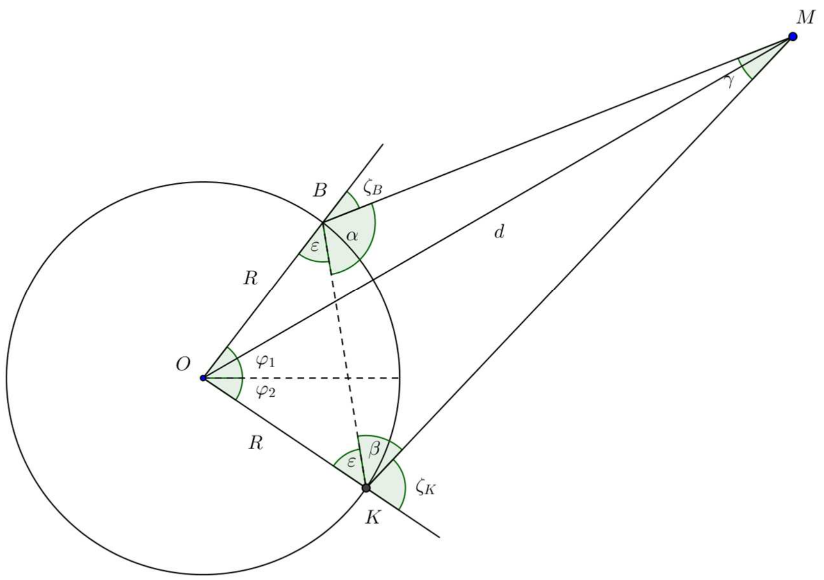
Anwendung aus der Astronomie:
Berlin und Kapstadt liegen nahezu auf demselben Längenkreis (Meridian). Die Astronomen Lalande in Berlin und Lacaille in Kapstadt haben 1751 zur gleichen Zeit die folgenden Zenitdistanzen desselben Mondrandes gemessen:

Berlin $\varphi_B = 52°31'13''$ Zenitdistanz $\zeta_B = 41°15'44'' \approx 41.262$

Kapstadt $\varphi_K = -33°55'15''$ Zenitdistanz $\zeta_K = 46°33'37'' \approx 46.560$

Erdradius R = 6371.2 km

Welcher Wert für den Mondabstand ergibt sich aus diesen Angaben?



Zunächst kann im gleichschenkligen Dreieck OKB die Hilfsstrecke $\overline{BK}$ berechnet werden:

$$\overline{BK} = 2R \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

Mit $\varepsilon = 90° - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ sind nun die restlichen Winkel im Dreieck BKM bestimmt:

$$\alpha = 180° - \varepsilon - \zeta_B$$
$$\beta = 180° - \varepsilon - \zeta_k$$
$$\gamma = 180° - \alpha - \beta$$

Damit kann im Dreieck BKM die Strecke $\overline{BM}$ mit dem Sinussatz berechnet werden:

$\frac{\overline{BM}}{\sin\beta} = \frac{\overline{BK}}{\sin\gamma}$ oder

$$\overline{BM} = \frac{\overline{BK} \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

Mit dem Cosinussatz im Dreieck OMB ergibt sich schliesslich der gesuchte Abstand d:

$$d = \sqrt{R^2 + \overline{BM}^2 - 2R \cdot \overline{BM} \cdot \cos(\varepsilon + \alpha)} \approx 366166\ km$$

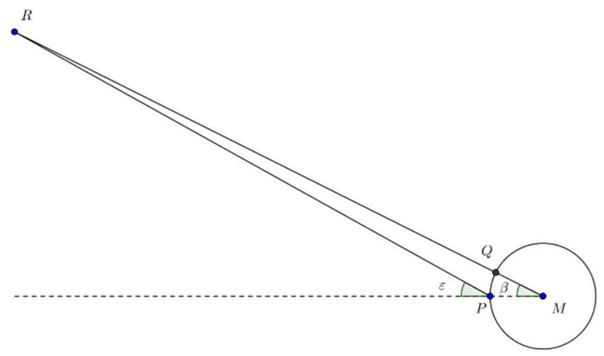
Numerische Resultate:

R		z_B	z_K	fi_1	fi_2	epsilon	alfa	beta	gamma
	Grad	41.2622222	46.5602778	52.5202778	33.9208333	46.7794444	91.9583333	86.6602778	1.38138889
6371.2	Bogenmass	0.72016163	0.81263015	0.91665177	0.59203023	0.81645533	1.60497569	1.51250718	0.02410978

BK	gls 3Eck	BK	Cossatz	BM	Sinussatz	d=ML
8726.10495		8726.10495		361352.429		366166

Aufgabe Diskuswurf (wh)
Ein Sportler wirft den Diskus vom Randpunkt P des Wurfkreises mit Radius r = 1.25 m um ε = 8° schräg gegen die radiale Richtung bis nach R. Gemessen wird senkrecht zum Wurfkreisrand QR = 74.04 m. Welche Weite hätte der Werfer bei einer optimalen Wurfrichtung erzielt?

Sinussatz im Dreieck RMP,
Winkel α bei R, Winkel β bei M



$$\frac{\overline{RQ}+r}{\sin(180° - \varepsilon)} = \frac{r}{\sin\alpha} \qquad \sin\alpha = \frac{r \cdot \sin\varepsilon}{\overline{RQ}+r}$$

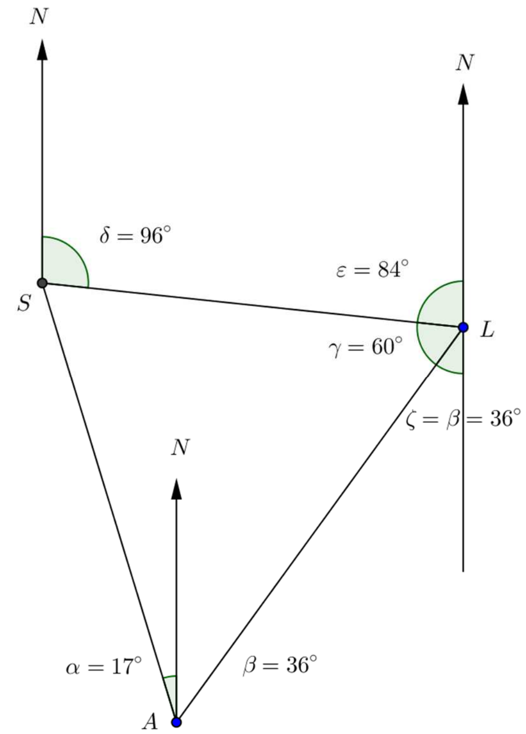
$$\beta = \varepsilon - \alpha$$

$$\overline{RP}^2 = r^2 + (\overline{RQ}+r)^2 - 2r \cdot (\overline{RQ}+r) \cdot \cos\beta$$

numerisch
$\overline{RP} \approx 74.68$ m

1989 stellte Jürgen Schuldt (DDR) mit 74.08 m im Diskuswerfen einen neuen Weltrekord auf.

Aufgabe : Peilung
in Schiff kann seinen Standort A folgendermassen bestimmen:
Es peilt ein zweites Schiff S in Richtung N17°W und einen Leuchtturm L in N36°E an. Dieses Schiff S und der Leuchtturm L haben nach der Seekarte eine Entfernung von 16.4 Seemeilen (1 Seemeile entspricht 1.852 km). Vom Schiff S aus liegt der Leuchtturm in Richtung N96°E.
Welche Entfernung d = $\overline{AS}$ hat das Schiff mit Standort A vom Schiff S in km.



$$\frac{d}{\sin 60°} = \frac{\overline{SL}}{\sin(17° + 36°)}$$

$$d = \frac{\overline{SL} \cdot \sin 60°}{\sin 53°} \approx 17.8\ sm \approx 33\ km$$

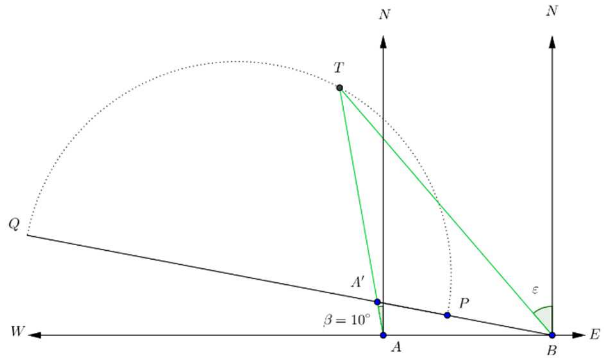
Übungsaufgabe:
Ein Schiff fährt mit 20 Knoten (1 Knoten entspricht einer Seemeile pro Stunde also 1.852 km/h) Geschwindigkeit auf konstantem Kurs. In der Position A erscheint ein Leuchtturm L unter dem Winkel α = 30°, eine halbe Stunde später in Position B erscheint L unter dem Winkel β = 42.5°. Wie weit ist das Schiff nach einer weiteren Viertelstunde in der Position C vom Leuchtturm L entfernt?

Lösung : $\overline{CL} \approx 36.5$ km

Übungsaufgabe:
Ein Flugzeug fliegt mit einer Eigengeschwindigkeit von 400 km/h den Kurs N32°E. Es weht eine Südwestwind mit einer Gescheindigkeit von 80 km/h. Welche Fluggescheindigkeit und welche Flugrichtung hat das Flugzeug tatsächlich?

Lösung
v ≈ 478 km/h, Kurs ≈ N34°E.

Aufgabe: (aufwändiger wegen *)
An einem genau in west-östlicher Richtung verlaufenden Ufer eines Sees liegen die Bootsanlegeplätze A und B, die 5 km voneinander entfernt sind. Ruth startet um 13:00 Uhr von A aus mit $v_A = 12\ \text{kmh}^{-1}$ und Kurs 10°NW. Jürg fährt um 13:05 Uhr von B aus mit Geschwindigkeit $v_B = 18\ \text{kmh}^{-1}$. Welchen Kurs ε muss Jürg einhalten, um Ruth im Punkt T zu treffen und wann findet dieses Treffen statt.



Zurückgelegte Strecke AT von Ruth:
$t \cdot 0.2$ km/min
Zurückgelegte Strecke BT von Jürg:
$(t-5)\cdot 0.3$ km/min

Cosinussatz im Δ ABD:
$$((t-5)\cdot 0.3)^2 = (t\cdot 0.2)^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 0.2\cdot t\cdot\cos 100° \qquad (*)$$
oder angenähert:
$t^2 - 24.9t - 455 = 0$ mit den Lösungen: $t_1 \approx 37.18$ min und ($t_2 \approx -12.24$ min)
Ruth legt die Strecke $\overline{AT} \approx 7.437$ km zurück, Jürg $\overline{BT} \approx 9.655$ km.
Der gesuchte Kurswinkel ε ergibt sich mit dem Sinussatz im Δ ABT:
$$\frac{BT}{\sin 100°} = \frac{AT}{\sin(90° - \varepsilon)} \quad \text{zu}$$
$$\sin(90° - \varepsilon) = \cos\varepsilon = \frac{AT\cdot\sin 100°}{BT}$$ mit der Lösung ε≈ 43.6°NW

Geometrische Lösung:
Beim Start von Jürg hat Ruth bereits A' erreicht. Ab diesem Zeitpunkt hat der Treffpunkt T das Abstandsverhältnis $v_A{:}v_B = 2{:}3$. D liegt also auf dem Apolloniuskreis über A'B zum Verhältnis 2: 3.