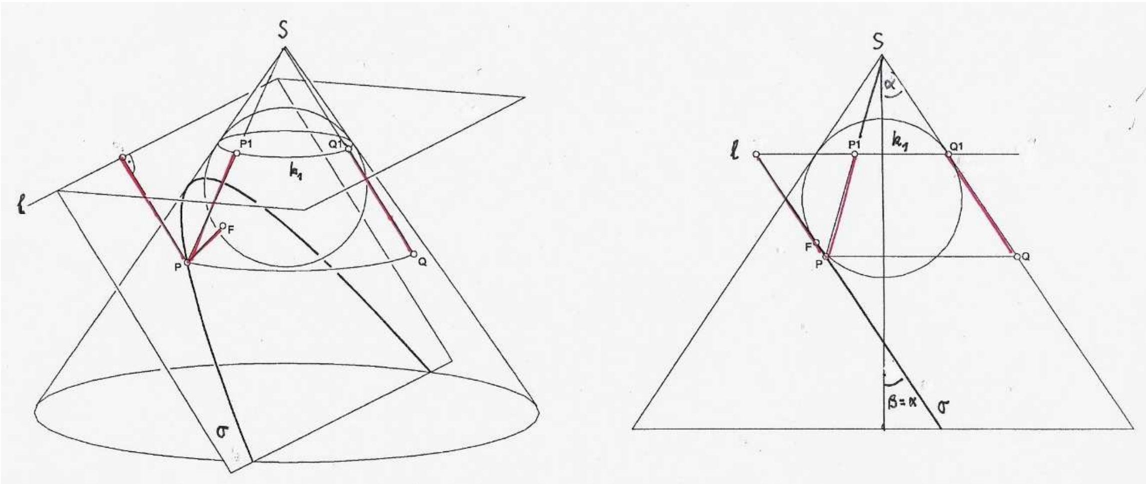
3 Die Parabel

3.1 Die Parabel als Kegelschnitt

Wird ein Kreiskegel von einer Ebene geschnitten, welche zu einer Mantellinie des Kegels parallel ist, so entsteht als Schnittkurve eine Parabel.



Sei SP die Mantellinie durch einen Punkt P der Schnittkurve. Die Dandelinkugel berührt die Schnittebene in einem Punkt F und schneidet den Kegel in einem Kreis k_1. Die Berührkreisebene schneidet die Schnittebene in einer Geraden *l*. Da die Tagentenabschnitte durch P an die Kugel gleiche Länge haben gilt
$\overline{PF} = \overline{PP_1} = \overline{QQ_1} = \overline{Pl}$ oder auch

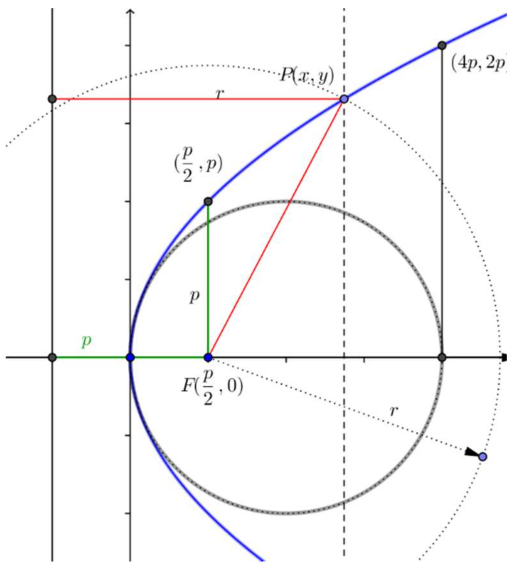
$$\boxed{\frac{\overline{PF}}{\overline{Pl}} = 1} \qquad 3.1.1$$

> Definition:
> Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte P, die von einem festen Punkt F und einer gegebenen Geraden l den gleichen Abstand haben

Bezeichnungen:
l heisst Leitgerade, F Brennpunkt.
Der Abstand des Brennpunkts F von der Leitgeraden heisst Parameter und wird mit p bezeichnet.

Abbildung:
l: x = - 1, F(1, 0) p = 2

Konstruktion:
Der Kreis um F mit Radius r wird mit der Parallelen zur Leitgeraden *l* im Abstand $r \geq \frac{p}{2}$ geschnitten.



Bemerkungen:
In der Umgebung des Scheitels wird die Parabel durch ihren Krümmungskreis mit dem Radius p angenähert.
Wie sich später aus der Parabelgleichung ergibt, bewirkt eine Verdopplung der x-Koordinate eine Multiplikation der y-Koordinate mit $\sqrt{2}$.

3.2 Die Koordinatengleichung der Parabel

Aus der Ortsbedingung ergibt sich die Koordinatengleichung der Parabel:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

und damit

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad 3.2.1$$

Gleichung einer Parabel mit Scheitel S(0, 0), Brennpunkt $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ p ≥ 0 und der

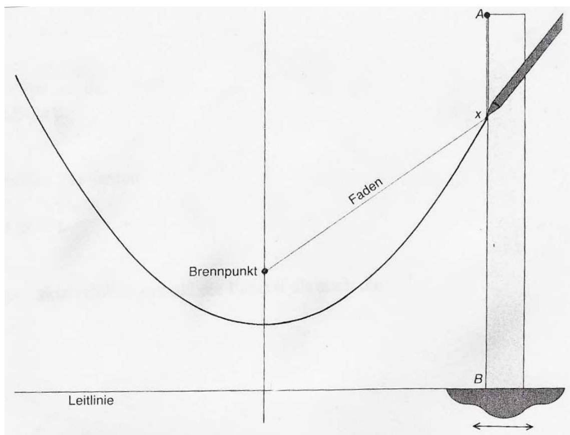
Leitgeraden *l*: $x = -\frac{p}{2}$.

Die Normalparabel

Da die Gleichung nur von p abhängt, sind alle Parabeln zueinander ähnlich.

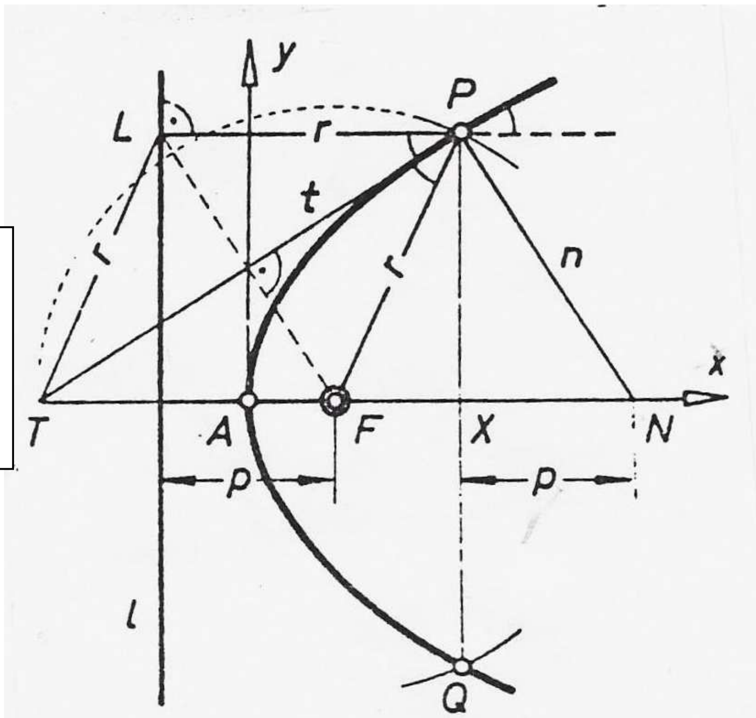
Spiegelt man diese Parabel an der 1. Winkelhalbierenden, so erhält man die Gleichung
$y = \frac{1}{2p}x^2$.
Durch Vergleich mit der bekannten Parabelgleichung $y = ax^2$ ergibt sich die Beziehung
$a = \frac{1}{2p}$. Der Brennpunkt der Normalparabel mit a = 1 liegt also im Punkt $F(0,\ \frac{1}{4})$.

Die folgende einfache Methode eine Parabel zu zeichnen, stammt wahrscheinlich von Johannes Kepler.



3.3 Parabeltangenten

Es kann bewiesen werden, dass in der Abbildung (*) das Viereck FPLT ein Rhombus ist. Daraus folgt der



> Satz:
> Die Tangente an eine Parabel im Parabelpunkt P halbiert den Winkel zwischen dem Brennstrahl PF und dem Lot PL auf die Leitlinie.

Aus diesem Satz ergibt sich eine einfache Konstruktion der Parabeltangente und ihre Gleichung.

Die Steigung hat nämlich den Wert $\frac{y_0}{2x_0}$.

Ihre Gleichung in der Punkt-Steigungsform lautet damit

$$y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0} \cdot (x - x_0)$$

Multiplikation der beiden Seiten mit dem Nenner ergibt

$2x_0 y - 2x_0 y_0 = y_0 x - y_0 x_0$ oder

$2x_0 y = y_0 x + y_0 x_0$

Ersetzt man auf der linken Seite $2x_0$ durch $\frac{1}{p} \cdot y_0^2$ so ergibt sich nach Division durch y_0 schliesslich

$yy_0 = p \cdot (x + x_0)$ Gleichung der Parabeltangente 3.3.1

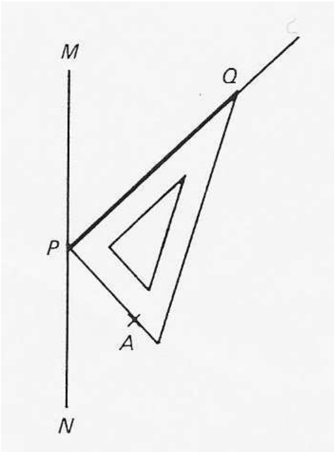
> Satz:
> Die Subtangente der Parabel $y^2 = 2px$ hat die Länge $2x_0$,
> die Subnormale die Länge p.

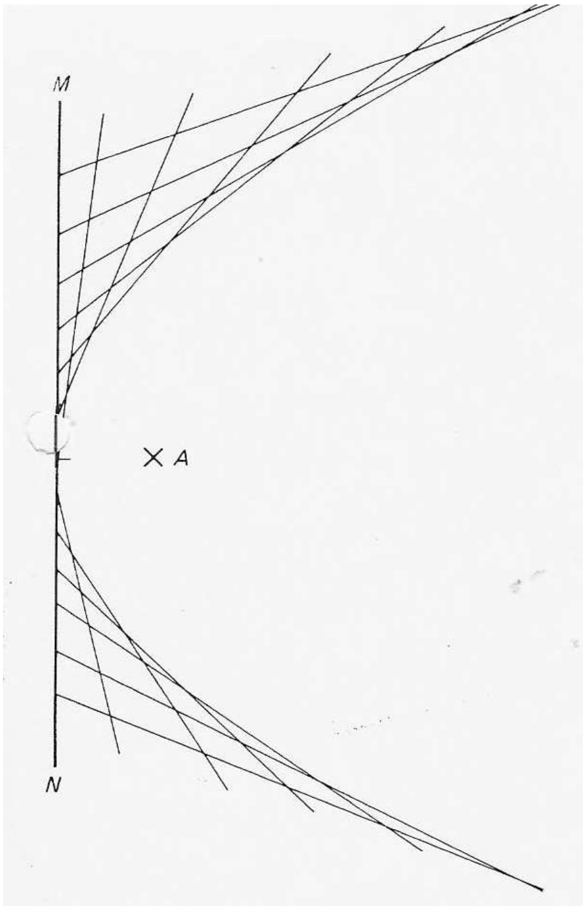
Übungsaufgabe:
Gesucht sind die Gleichungen der beiden Tangenten an die Parabel Gleichung $y^2 = 4x$, welche durch den Punkt Q(-2, 1) gehen.

Lösung:
Die Koordinaten der Berührungspunkte erfüllen sowohl die Parabel als auch die Tangentengleichung.

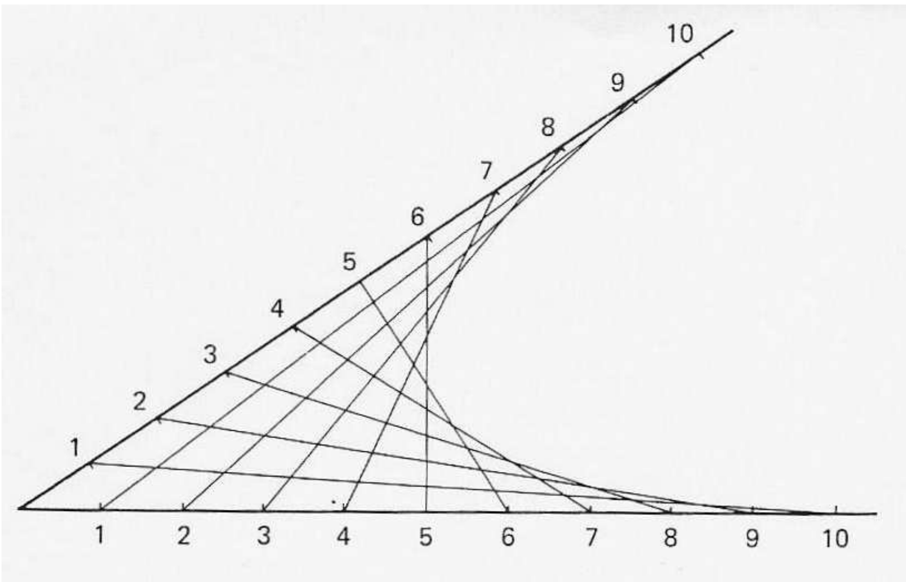
$B_1(4, 4)$ $x - 2y + 4 = 0$
$B_2(1, -2)$ $x + y + 1 = 0$

3.4 Parabeln als Hüllkurve





Eine Parabel kann auch folgende Weise als Hüllkurve gebildet werden:



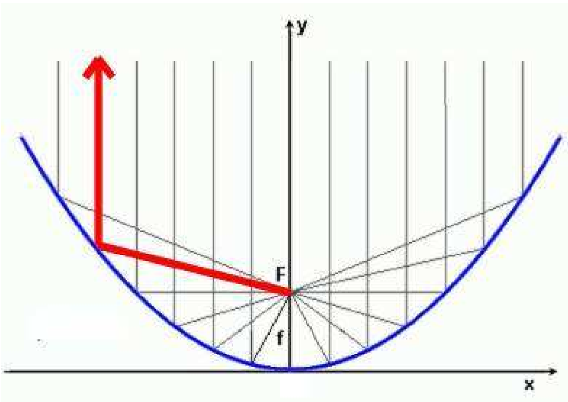
Dazu teilt man zwei Strecken gleicher Länge mit einem gemeinsamen Anfangspunkt in 10 Teile und verbindet den n-ten Punkt der einen Strecke mit dem (11 – n)-ten der andern Strecke, d.h. 10 mit 1 , 2 mit 9 ….

(ohne Beweis)

3.5 Technische Anwendungen:

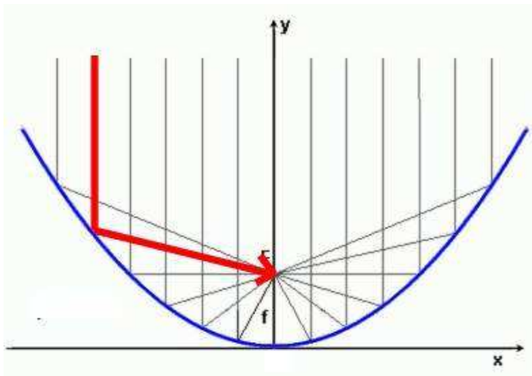
3.5.1
Parabolscheinwerfer:

Ein vom Brennpunkt ausgehender Lichtstrahl wird an der Parabel so reflektiert, dass er parallel zur Achse verläuft.



3.5.2
Parabolantenne

Umgekehrt werden achsenparallel verlaufende Strahlen so reflektiert, dass sie durch den Brennpunkt gehen



3.5.3
Wurfparabel, schiefer Wurf:
Jeder waagrecht geworfene Stein beschreibt angenähert ein Parabelbahn (Galilei 1609)
Experiment: Eine in Tinte getauchte Murmel wird über eine schiefe Ebene gerollt.

3.5.4
Rotierendes Becherglas:
Rotiert das Glas um seine Mittelachse, so nimmt die Wasseroberfläche die Gestalt eines Paraboloids an.