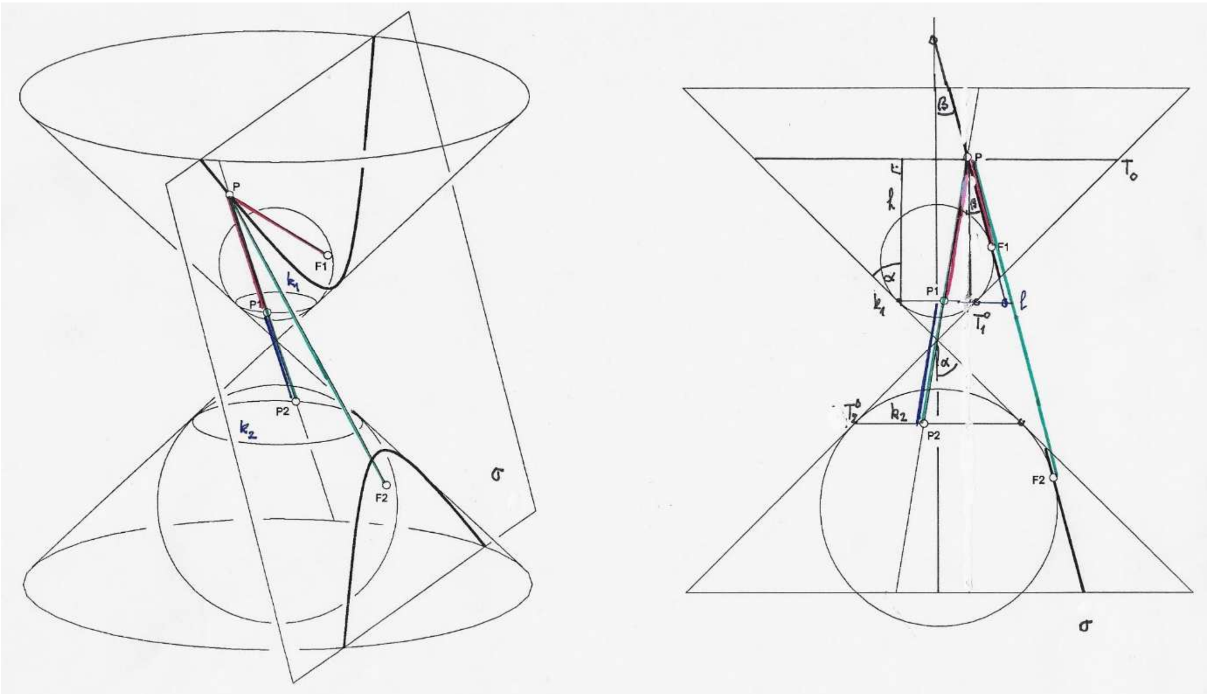
4 Hyperbel

4.1 Die Hyperbel als Kegelschnitt

Wird ein Kreiskegel mit dem halben Öffnungswinkel α von einer Ebene σ geschnitten, die mit der Kegelachse einen Winkel $\beta < \alpha$ einschliesst, so entsteht als Schnittkurve eine Hyperbel.
Die beiden Dandelin-Kugeln berühren die Schnittebene in den Punkten F_1 und F_2 und den Kegel in den Berührkreisen k_1 und k_2. In diesem Fall besteht die Schnittkurve aus zwei so genannten Ästen. Die Mantellinie durch einen beliebigen Punkt P der Schnittkurve schneidet die Berührkreise in den Punkten P_1 bzw. P_2. Die wahre Länge der Strecke P_1P_2 bezeichnen wir mit 2a.



Aus analogen Überlegungen wie bei der Ellipse gilt:
$|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = |\overline{PP_2}| - |\overline{PP_1}| = |\overline{P_1P_2}| = 2a$
kurz

$$\boxed{|PF_2 - PF_1| = 2a} \qquad 4.1.1$$

Definition:
Eine Hyperbel ist der geometrische Ort der Punkte P, für welche der Betrag der Entfernungsdifferenz von zwei gegeben Punkten F_1 und F_2 einen festen Wert 2a hat.

4.2. Leitliniendefinition

In der Abbildung mit den Dandelinkugeln kann die Höhe h auf zwei verschiedene Arten berechnet werden:
Die Mantellinien schliessen mit der Kegelachse den Winkel α ein
Wegen $\overline{PP_1}$=$\overline{PF_1}$ (Abschnitte auf den Kugeltangenten) folgt daraus:
$h = \overline{PP_1} \cdot \cos \propto = \overline{PF_1} \cdot \cos \propto$
Da die Schnitteben mit der Kegelachse den Winkel β einschliesst gilt:
$h = \overline{Pl_1} \cdot \cos \beta$
Gleichsetzen ergibt
$\overline{PF_1} \cdot \cos \propto = \overline{Pl_1} \cdot \cos \beta$
oder

$$\boxed{\frac{\overline{PF_1}}{\overline{Pl_1}} = \frac{\cos \beta}{\cos \propto} = \varepsilon > 1} \qquad 4.2.1$$

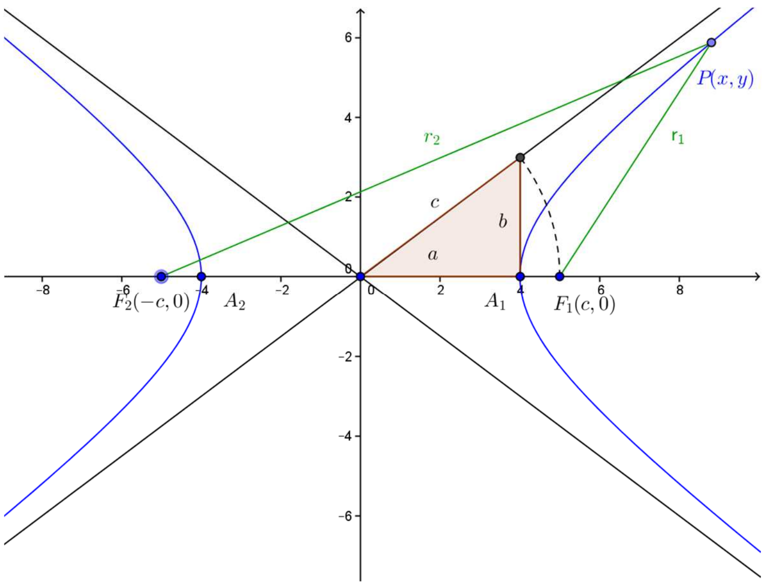
denn wegen $\beta < \propto$ ist $\cos \beta > \cos \propto$.

Definition der Hyperbel (Leitliniendefinition):
Gegeben sind ein Punkt F (Brennpunkt) und eine Gerade *l* (Leitgerade) und eine Zahl ε. Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte P. deren Abstandsverhältnis von F und von *l* den konstanten Wert ε > 1 hat.

Abbildung:
Gegeben sind
$\overline{F_1F_2} = 2c = 10$ und 2 a = 8

Bezeichnungen:
A_1, A_2: Hauptscheitel
a heisst reelle,
b imaginäre Achse.

Nebenscheitel existieren nicht.
c heisst lineare Exzentrizität.
Die sogenannte numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ist ein Mass für die Form der Hyperbel.



4.2.2

Zur Konstruktion:
Der Kreis um F_1 mit Radius $r_1 \geq c - a$ wird mit dem Kreis um F_2 mit Radius $r_2 \geq r_1 + 2a$ geschnitten.

4.3 Die Koordinatengleichung der Hyperbel

Ein beliebiger Hyperbelpunkt P(x, y) erfüllt die Ortsbedingung: $\left|PF_2 - PF_1\right| = 2a$ bzw.

$r_2 - r_1 = \pm 2a$ oder $r_2 = \pm 2a + r_1$ 4.3.1

Nach Pythagoras gilt:

$r_{1,2} = \sqrt{(x \pm c)^2 + y^2}$

4.3.1 wird quadriert:

$r_2^2 = 4a^2 \pm 4ar_1 + r_1^2$ und mit $r_2^2 - r_1^2 = 4cx$

$\mp 4ar_1 = 4a^2 + r_1^2 - r_2^2 = 4a^2 - 4cx$

nach Division durch 4 und Vertauschen der beiden Seiten erhält man

$a^2 - cx = \mp 4ar_1$

Quadrieren führt auf

$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2 \cdot \left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$

$\left(c^2 - a^2\right) \cdot x^2 - a^2y^2 = a^2 \cdot \left(c^2 - a^2\right)$

Setzt man schliesslich

$\boxed{b^2 = c^2 - a^2}$ 4.3.2

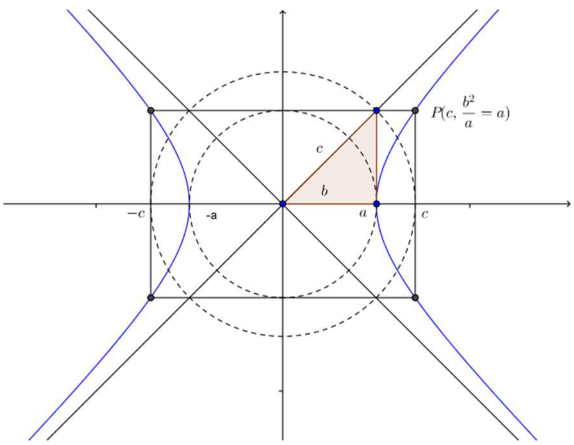
so erhält man

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ und nach Division durch a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Koordinatengleichung der Hyperbel mit dem Mittelpunkt M(0, 0) und den Brennpunkten F_1(-c, 0) und F_2(c, 0) und der grosse Halbachse a. 4.3.3

Im Fall a = b heisst die Hyperbel gleichseitig. In diesem Fall stehen die Asymptoten aufeinander senkrecht.



4.4 Asymptoten der Hyperbel

Für wachsende Beträge von x nähern sich die Äste der Hyperbel immer mehr den Geraden mit den Gleichungen $y = \pm \frac{b}{a} x$ Diese Geraden heissen Asymptoten der Hyperbel.

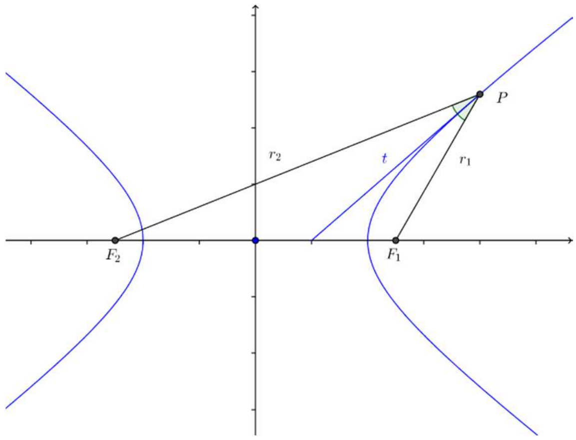
Begründung:
Ist $P_1(x_0, y_0)$ ein beliebiger Hyperbelpunkt im 1. Quadranten und $P_1\left(x_0, y_1 = \frac{b}{a} \cdot x_0\right)$ der entsprechende Punkt der Asymptoten, dann gilt er nach 4.3.3 wegen
$\frac{y_0^{\,2}}{b^2} = \frac{x_0^{\,2}}{a^2} - 1$ also $y_0^{\,2} = b^2 \cdot \frac{x_0^{\,2}}{a^2} - b^2$
dabei ist der erste Summand gerade gleich dem Quadrat der y-Koordinate y_1 des Asymptotenpunkts.
Für die Differenz der Quadrate gilt also
$y_1^{\,2} - y_0^{\,2} = b^2$ oder nach Division durch $y_1 - y_0$
$y_1 - y_0 = \frac{b^2}{y_1 + y_0}$
Da für x →∞ auch $y_1 + y_0$ gegen ∞ strebt, hat $y_1 - y_0$ für x →∞ den Grenzwert 0, woraus die Asymptoteneigenschaft folgt. Aus Symmetriegründen gilt sie in allen vier Quadranten.

Übungsaufgabe:
Es ist zu zeigen, dass die Ursprungsgerade y = mx die Hyperbel in Normallage in den Punkten
$S_{1,2}\left(x_{1,2} = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}, y_{1,2} = \pm \frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}\right)$
schneidet.
Da $b^2 - a^2m^2 \geq 0$ gelten muss folgt, dass Schnittpunkte nur für $|m| < \frac{b}{a}$ vorliegen.
Damit sind die Steigungen der Asymptoten erneut zu erkennen.

Übungsaufgaben:
Gesucht ist die Gleichung der Hyperbel in Normallage, wenn folgende Eigenschaften gegeben sind:
a) der Brennpunkt $F_2(8, 0)$ und die grosse Halbachse a = 6
b) gleichseitige Hyperbel mit a = 7.
c) zwei Hyperbelpunkte P(4, 0) und Q(5, 3).

4.5 Tangenten an eine Hyperbel

Es gelten die folgenden Sätze (ohne Beweis)



Satz 1: Die Tangente t an eine Hyperbel im Punkt P halbiert den Winkel zwischen den Brennstrahlen PF_1 und PF_2.

Folgerung:
Alle Strahlen, die von F_1 ausgehen, verlaufen nach der Spiegelung an der Hyperbel so, als kämen sie von F_2.

Satz 2:

Die Gleichung der Tangente an die Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ im Punkt $P(x_0, y_0)$ lautet

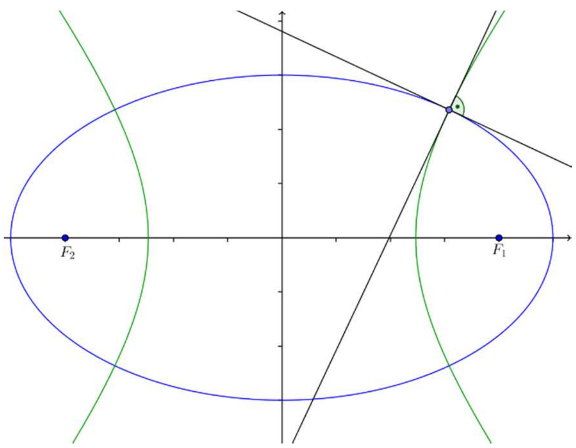
$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Bemerkung:
Die Tangente kann aufwändig auch mit der Diskriminantenmethode bestimmt werden.

Satz 3:
Die Gerade mit der Gleichung y = mx + q ist Tangente an die Hyperbel wenn gilt:
$a^2 m^2 - b^2 = q^2$

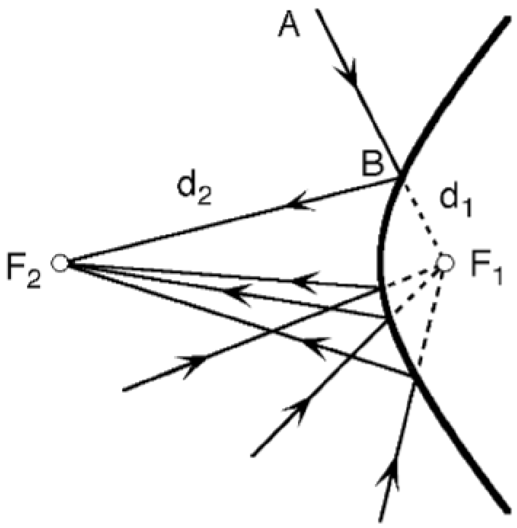
Definition:
Ellipsen und Hyperbeln mit gemeinsamen Brennpunkten heissen konfokal.

Satz 4:
Eine Ellipse und eine konfokale Hyperbel schneiden sich rechtwinklig.



4.6 Beispiele von Hyperbeln

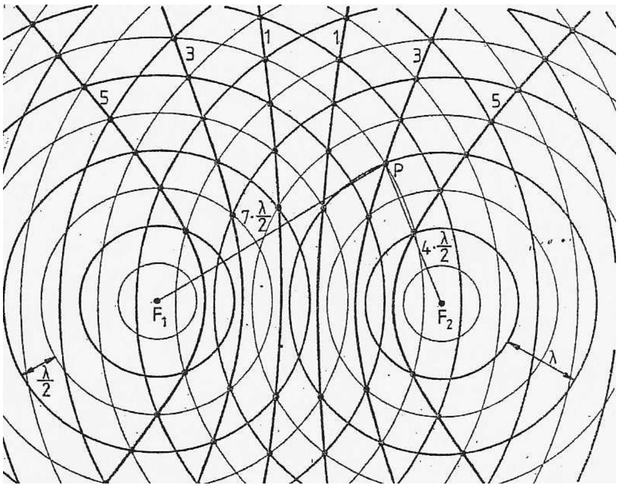
4.6.1
Befindet sich in einem Brennpunkt einer Hyperbel eine Lichtquelle, so werden die von ihr ausgehenden Lichtstrahlen so an der Hyperbel reflektiert, dass sie alle vom andern Brennpunkt auszugehen scheinen. (nach 4.5 Folgerung Satz 1)

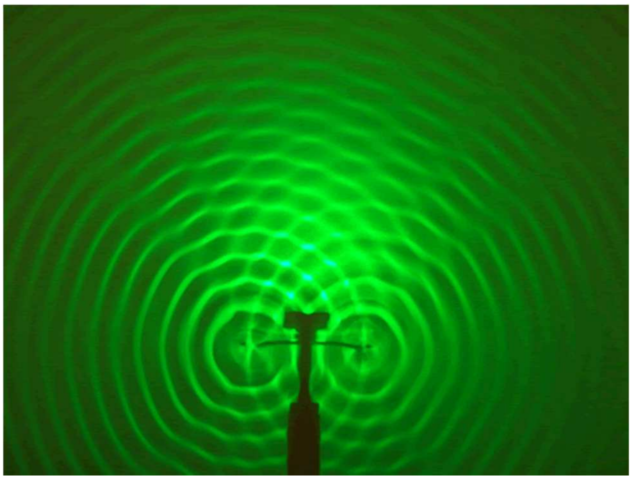


4.6.2
An einem gespitzten Bleistift treten Hyperbeln auf.

4.6.3
Peilung:
Von einem unbekanntem Bebenzentrum P geht eine Druckwelle aus und erreicht vier Messstellen F_i zu verschiedenen Zeitpunkten t_i nach Entstehen der Welle. Aus den Zeitdifferenzen können bei bekannter Geschwindigkeit v der Welle die Wegdifferenzen berechnet werden. P liegt
einerseits auf der Hyperbel mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und $2a = v \cdot |t_1 - t_2|$ und
andrerseits auf der Hyperbel mit den Brennpunkten F_3 und F_4 und $2a = v \cdot |t_3 - t_4|$.
P ist also einer der maximal vier Schnittpunkte der beiden Hyperbeln. Wo das gesuchte Zentrum liegt, verrät normalerweise eine Grobpeilung.

4.6.4
Sich überlagernde Kreiswellen:
Zwei punktförmige Erreger F_1 und F_2 auf der Wasseroberfläche verursachen sich überlagernde Kreiswellen. In der Momentaufnahme sind Wellenberge dick, Wellentäler dünn ausgezogen. Es gibt Zonen relativer Ruhe auf dem Wasser und zwar bei Punkten für die der Gangunterschied $|PF_1 - PF_2|$ ein ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ ist.
Sie liegen auf Hyperbeln mit den Brennpunkten F_1 und F_2.





http://www.av.ph.tum.de/Experiment/1000/Beschreibungen/ver1666.php

Übungsaufgabe:
an einer genau von Westen nach Osten laufenden Küste hört man in B aus nördlicher Richtung eine Dampfsirene 7.2 Sekunden später als im 4 km östlich gelegenen Ort A, aber 7.2 Sekunden früher als im 3 km westlicher gelegenen Ort C (Schallgeschwindigkeit v ≈ 333 m/s. Berechne und konstruiere den Standort des Dampfers.

5. Gleichung der Kegelschnitte bei einer Parallelverschiebung?

Regel:
Verschiebt man eine Kurve um x_0 Einheiten in x-Richtung und um y_0 Einheiten in y-Richtung, so erhält man die Gleichung der verschobenen Kurve, indem man x durch $x - x_0$ und y durch $y - y_0$ ersetzt.

Kegelschnitt	Normallage	Gleichung der verschobenen Kurve Mittelpunkt/Scheitel $M(x_0, y_0)$
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$
Parabel	$y^2=2px$	$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

Aufgabe:
Es sind Typ und wesentliche Parameter der folgenden Kegelschnitte zu bestimmen:

a) $2x^2-3y^2-12x-6y-3=0$	$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{6}=1$	Hyperbel
b) $4x^2-3y^2-16x-6y+13=0$	$4(x-2)^2-3(y-3)^2=0$	2 Geraden
c) $16x^2+25y^2+64x-150y-111=0$	$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$	Ellipse
d) $y^2+4y-8x+36=0$	$(y+2)^2=8(x-1)$	Parabel

Allgemein gilt:

Satz:
Die Gleichung 2. Grades $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ stellt bis auf Ausnahmefälle einen Kegelschnitt dar.
(Näheres dazu →Lineare Algebra: Hauptachsentransformation).