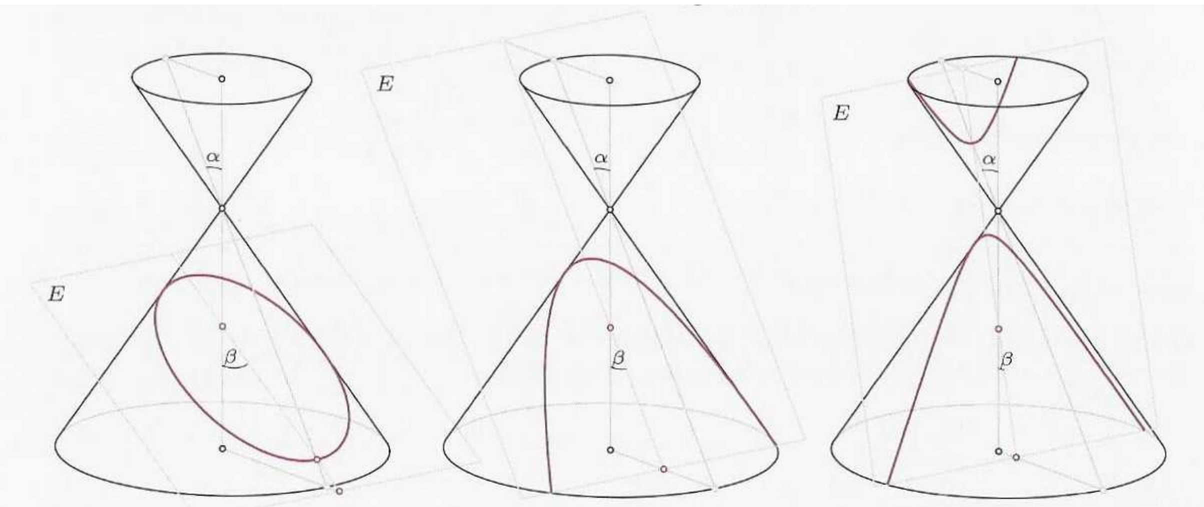
6. Zusammenfassung

6.1 Die Leitgeradendefinition der Kegelschnitte



Ellipse, falls $\beta > \alpha$ Parabel, falls $\beta = \alpha$ Hyperbel, falls $\beta < \alpha$

Die drei Kegelschnitte können nach Apollonius gemeinsam definiert werden (vgl. 2.2.1, 3.1.1 und 4.2.1):

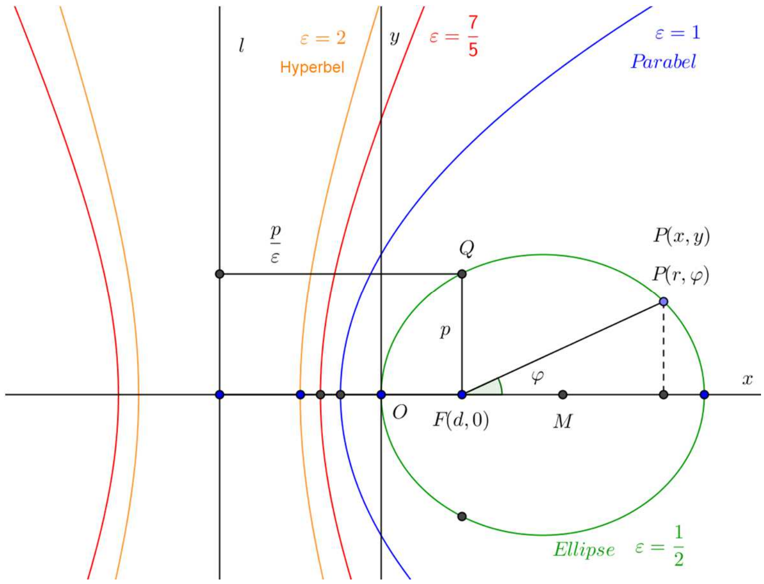
Definition:
Ein nicht ausgearteter Kegelschnitt ist die Menge aller Punkte einer Ebene, für die das Verhältnis ε der Entfernung von einem gegebenen Punkt F Brennpunkt) zum Abstand von einer gegebenen Geraden (Leitgerade) eine Konstante ε ≥ 0 ist.

$$\boxed{\frac{\overline{PF}}{\overline{Pl}} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \varepsilon}$$ (Pappus um 320) 6.1.1

Im Fall der Ellipse ist $\varepsilon < 1$, im Fall der Parabel $\varepsilon = 1$ und der Hyperbel $\varepsilon > 1$.

6.2. Die Kegelschnittgleichung in Polarform

Abbildung 6.2.1



$$\overline{PF} = \varepsilon \cdot \overline{Pl}$$
$$\overline{PF} = r = \varepsilon \cdot \left(r \cdot \cos\varphi + \overline{Ql}\right)$$
$$r = \varepsilon \cdot \left(r \cdot \cos\varphi + \frac{p}{\varepsilon}\right)$$
$$r = \varepsilon \cdot r \cdot \cos\varphi + p$$
$$p = r \cdot (1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi)$$

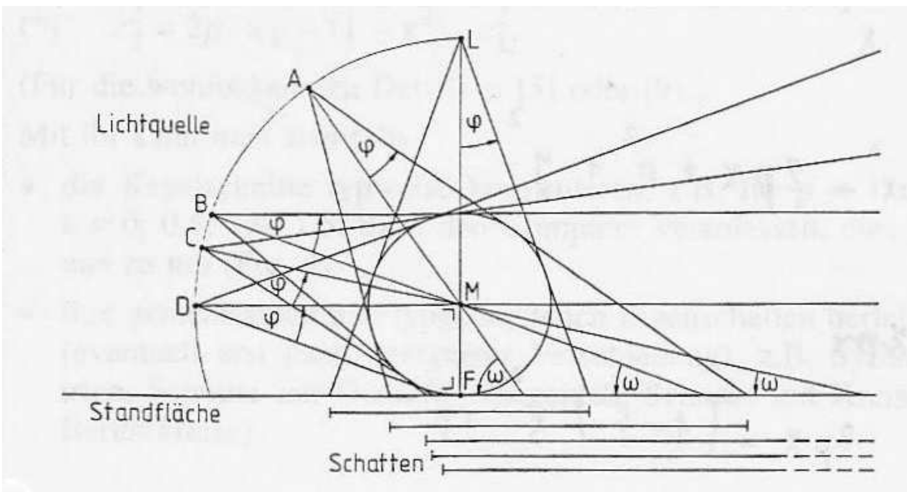
aufgelöst nach r

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon \cdot \cos\varphi}$$

Anwendung:
Der Schatten einer Kugel bei Zentralbeleuchtung ist abhängig vom Ort der Lichtquelle, also von der Beziehung zwischen dem spitzen Öffnungswinkel φ des Lichtkegels und dem spitzen Neigungswinkel ω der Kegelachse bezüglich der schattenfangenden Ebene.

Der Schlagschatten ist bei

L: ein Kreis
A: eine Ellipse
B: ein Parabel
C, D: eine Hyperbel



6.3 Die Scheitelgleichung eines Kegelschnitts

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen Ursprung im Scheitel O liegt, erhält der Brennpunkt die Koordinaten F(d, 0) und die Leitgerade wegen
$\overline{OF} = d = \varepsilon \cdot \overline{Ol}$
die Gleichung $x = -\frac{d}{\varepsilon}$
vgl. dazu die Abbildung 6.2.1

Für einen beliebigen Kegelschnittpunkt P(x, y) gilt dann wegen
$\overline{PF} = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$
$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pl}} = \frac{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}}{x + \frac{d}{\varepsilon}} = \varepsilon$
Die Gleichung kann vereinfacht werden zu:
$(x-d)^2 + y^2 = \varepsilon^2 \cdot \left(x + \frac{d}{\varepsilon}\right)^2$
$x^2 - 2dx + d^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon dx + d^2$
$y^2 = 2d(\varepsilon + 1)x - (1 - \varepsilon^2)x^2$
$d(\varepsilon + 1)$ ist gerade gleich dem Parameter p, denn für den Punkt Q gilt:
$\overline{QF} = \varepsilon \cdot \overline{Ql} = \varepsilon \cdot \left(d + \frac{d}{\varepsilon}\right) = d \cdot (\varepsilon + 1)$
Damit erhält man die

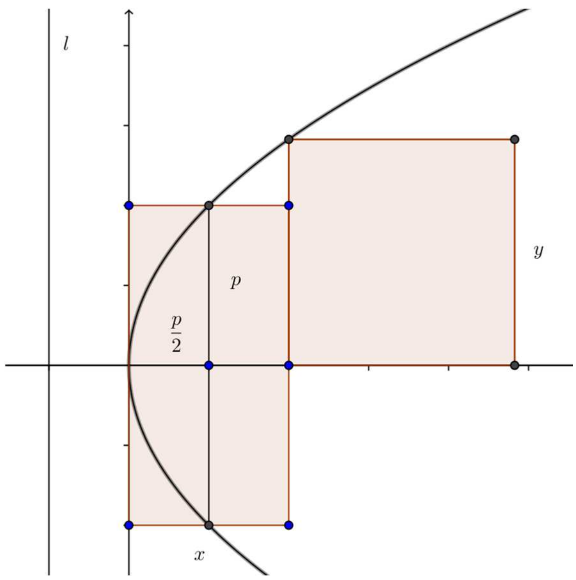
Scheitelgleichung des Kegelschnitts:

$$\boxed{y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2}$$

Im Fall der Ellipse ist $\varepsilon < 1$, im Fall der Parabel $\varepsilon = 1$ und der Hyperbel $\varepsilon > 1$.

Zudem ergibt sich wegen $\overline{QF} = p$, dass p gerade die halbe Breite des Kegelschnitts im Brennpunkt F ist.

Bemerkung:
Die Namen der Kegelschnitte stammen aus dem Griechischen:
Zugrunde liegt die Aufgabe, einer Strecke der Länge 2p ein Rechteck anzulegen, das gleiche Fläche hat, wie ein Quadrat der Seite y. Sie führt auf die Gleichung
$y^2 = 2px$
Bei der Parabel kommt die Rechtecksfläche der Quadratfläche gleich (paraballein: gleichkommen)
Bei der Ellipse fehlt (elleipein) im Vergleich zur Parabel der Betrag $(1 - \varepsilon^2)x^2$,
bei der Hyperbel übertrifft (hyperballein) der Wert den Vergleichswert um $(\varepsilon^2 - 1)x^2$.



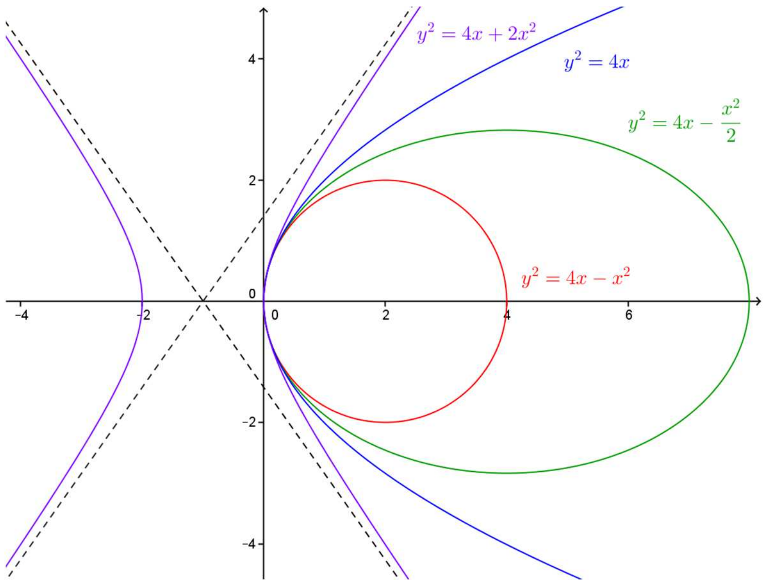
6.4 Zusammenhang mit der Mittelpunktsgleichung

Nach einigen Umformungen kann folgender Zusammenhang zwischen der Scheitelgleichung und der Mittelpunktsgleichung der Kegelschnitte bewiesen werden:

Ellipse:
$$\frac{(1-\varepsilon^2)^2x^2}{p^2}+\frac{(1-\varepsilon^2)x^2}{p^2}=1$$
Hyperbel
$$\frac{(1-\varepsilon^2)^2x^2}{p^2}-\frac{(1-\varepsilon^2)x^2}{p^2}=1$$

Übungsaufgabe:
Stelle die folgenden Kegelschnitte dar und ermittle ihre charakteristischen Grössen.
a) $y^2=4x-x^2$
b) $y^2=4x-\frac{1}{2}x^2$
c) $y^2=4x$
d) $y^2=4x+2x^2$

Lösung:



a)
$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$$
Kreis M(2, 0), r = 2
b)
$$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$$
Ellipse M(4, 0), a = 4, $b=2\sqrt{2}$
c)
Parabel p = 2
d)
$$(x+1)^2-\frac{y^2}{2}=1$$
Hyperbel M(-1,0), a = 1, $b=\sqrt{2}$
Asymptoten $y=\pm\sqrt{2}(x+1)$