2. Geometrie in der Gauss'schen Ebene

Gewisse Punktmengen in der Gauss'schen Ebene können mit einfachen Gleichungen in komplexen Zahlen beschrieben werden. Statt zwei Variablen x und y in der reellen Ebene ist nur eine komplexe Variable nötig.

|z| gibt gerade den Abstand des Punktes P(z) vom Nullpunkt an.
$|z-m|$ gibt gerade den Abstand des Punktes P(z) vom Punkt M(m) an.

Beispiele:

Suche die Punkte in der Gauss'schen Ebene, für die gilt:

a) $|z-2i|=|z-4|$ — Gesucht sind die Punkte, die von den Punkten A(2i) und B(4) den gleichen (reellen) Abstand haben. Sie liegen in der komplexen Ebene auf der Mittelsenkrechten von A(2i) und B(4).

b) $|z-2i|\geq|z-4|$ — Gesucht sind die Punkte P, deren Abstand vom Punkt A(2i) grösser als der Abstand vom Punkt B(4) ist. Die gesuchten Punkte liegen in der Halbebene unterhalb der Mittelsenkrechten von a).

c) $|z|=r$ — Die Punkte, welche vom Nullpunkt den Abstand r ∈ R haben, liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt M(0/0) und Radius r.

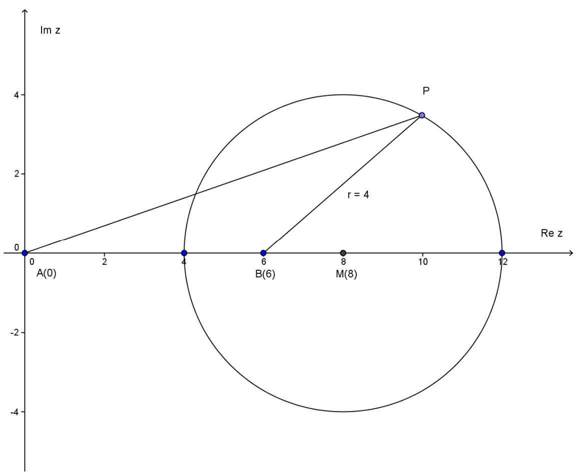
d) $|z-m|=r$ — Die Punkte, welche vom Punkt M(m) den Abstand r ∈ R haben, liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r.

e) $|z-m|\geq r$ — Die Punkte liegen ausserhalb des Kreises von d)

f) $|z|=2\cdot|z-6|$ — Gesucht sind die Punkte z, deren Abstand vom Punkt A(0) doppelt so gross ist, wie der Abstand von B(6). Diese Punkte liegen auf dem Apolloniuskreis mit dem Durchmesser C(4) und D(12). C und D teilen die Strecke AB harmonisch im Verhältnis 2:1.

Diese Aussagen können z.T. auch mit einigem Aufwand rechnerisch hergeleitet werden:

Die Gleichung a) z.B:
$|z-2i|=|z-4|$ ist gleichbedeutend mit
$|z-2i|^2=|z-4|^2$.
Mit z = x + iy ergibt sich:
$x^2+(y-2)^2=(x-4)^2+y^2$
oder nach Vereinfachung
y = 2x – 3.



Aufgabe:
Konstruiere einige Punkte in der Gauss'schen Ebene, für die gilt

$|z+4|+|z-4|=10$ Menge der Punkte, deren Abstandssumme von den gegebenen Punkten $F_1(-4)$ und $F_2(4)$ den festen Wert 10 hat. Diese Punkte liegen auf einer Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und der grossen Halbachse a = 5.