5. Division komplexer Zahlen

Spezialfall: Polarform der komplexen Zahl $\frac{1}{z}$.

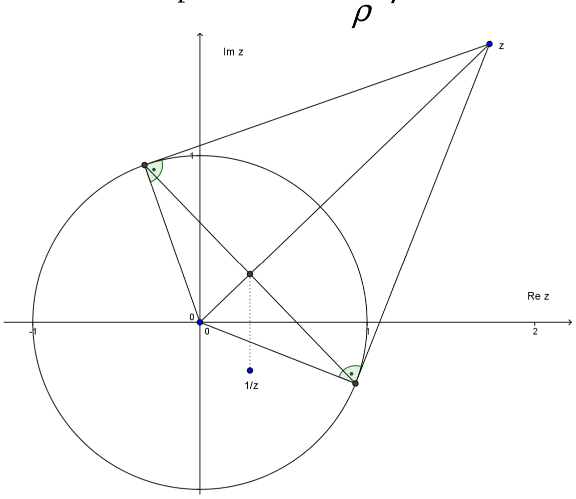
Erweitere mit der zu $cis\varphi$ konjugiert komplexen Zahl $cis(-\varphi)$

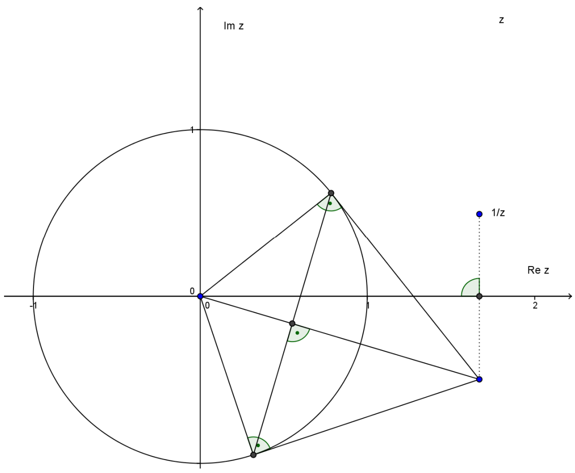
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\rho\cdot cis(\varphi)}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{cis(-\varphi)}{cis(\varphi)\cdot cis(-\varphi)}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{cis(-\varphi)}{cis(0°)}=\frac{1}{\rho}\cdot cis(-\varphi)$$

Die zugehörige (kreistreue) Abbildung heisst Inversion* am Einheitskreis.

Konstruktion des absoluten Betrags $\frac{1}{\rho}$ von $\frac{1}{z}$ mit dem

Kathetensatz pc = a^2 bzw. $\frac{1}{\rho}\cdot\rho=1^2$





Der allgemeine Fall wird wie folgt auf den Spezialfall zurückgeführt:

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\frac{1}{z_2}=r_1\,cis(\varphi_1)\cdot\frac{1}{r_2}\cdot cis(-\varphi_2)=\frac{r_1}{r_2}\,cis(\varphi_1-\varphi_2).$$

Komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Argumente subtrahiert.

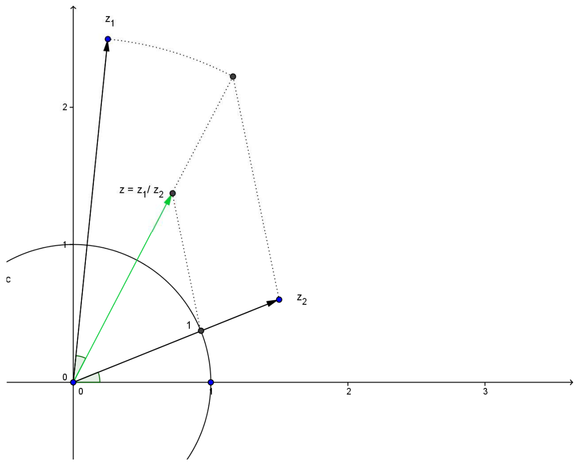
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$$

Beispiel:

$$\frac{2i}{i-1}=\frac{2\,cis(90°)}{\sqrt{2}\,cis(135°)}=\sqrt{2}\,cis(315°)$$

Konstruktive Lösung:

$$\frac{|z|}{1}=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$



6. Potenzen von komplexen Zahlen, Der Satz von Moivre

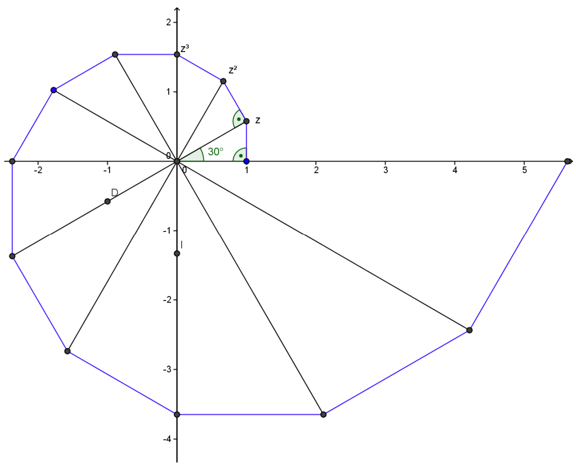
$z^2 = \rho^2$ cis(2φ) $\quad$ $z^3 = \rho^3$ cis(3φ) $\quad$ $z^4 = \rho^4$ cis(4φ)
durch induktives Schliessen erhält man

$z^n = \rho^n$ cis$(n\varphi)$ $\quad n \in N$

Beweis durch vollständige Induktion

Komplexe Zahlen werden potenziert, indem man
- ihre Beträge potenziert und
- ihre Argumente mit dem Exponenten multipliziert.

Bemerkung:
Die zu den Potenzen z^n gehörigen Punkte liegen auf einer logarithmischen (Bernoulli'schen) Spirale.



Beispiel:

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^6 = \left(2\,cis\,(60°)\right)^6 = 64\,cis\,(360°) = 64$$

Im Spezialfall $\rho = 1$ erhält man den sogenannten

Satz von Moivre: $\quad$ $(\text{cis } \varphi)^n = \text{cis } (n\varphi)$

nach Abraham de Moivre (1667 – 1754), französischer Mathematiker, Emigrant in England.

Beispiel:

$(\text{cis } \varphi)^3 = \text{cis}(3\varphi)$

Gleichsetzen der Realteile bzw. Imaginärteile ergibt die folgenden Additionstheoreme:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$$