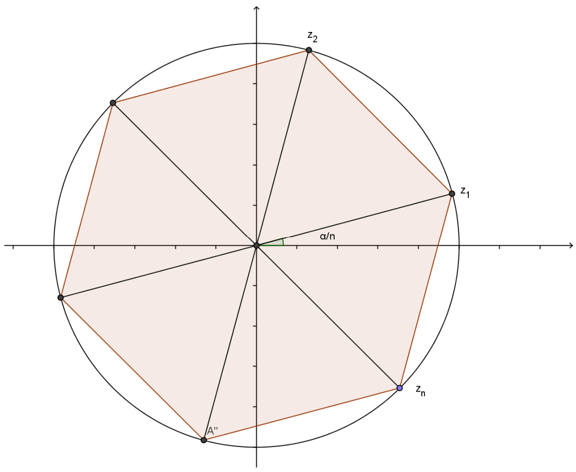
7. Die Gleichung z^n = a , $a \in C$

einführendes Beispiel:
$z^3 - 8i = 0 \qquad z^3 = 8i = 8 \text{ cis } 90° = \rho^3 \text{ cis } (3\varphi)$

Zwei komplexe Zahlen stimmen überein, wenn ihre Beträge gleich sind und ihre Argumente bis auf ganzzahlige Vielfache von 360° (2π) übereinstimmen (modulo 360° bzw. 2π).

Folgerung:
$\rho^3 = 8$ und damit $\rho = 2$
$3\varphi = 90° + k \cdot 360° \qquad k = 0, 1, 2 \qquad \varphi = 60° + k \cdot 120° \quad k = 0,1,2$
Die Gleichung hat also 3 verschiedene Lösungen $\rho = 1$ und φ = 60°, 180°, 300°

allg. Fall (vgl. F und T)
Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $z^n = a$
Fall $a \neq 0$
Stelle die komplexe Zahl in der Polarform dar:
$a = \rho \text{ cis } \alpha$



Satz:
Die Gleichung hat die n Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot cis\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Bemerkung:
Die Lösungen liegen also in der Gauss'schen Ebene auf dem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{|a|}$, die zugehörigen Punkte bilden ein reguläres n-Eck.

Beweis: Zeige dass gilt: $z_k^n = a$

Beispiel:

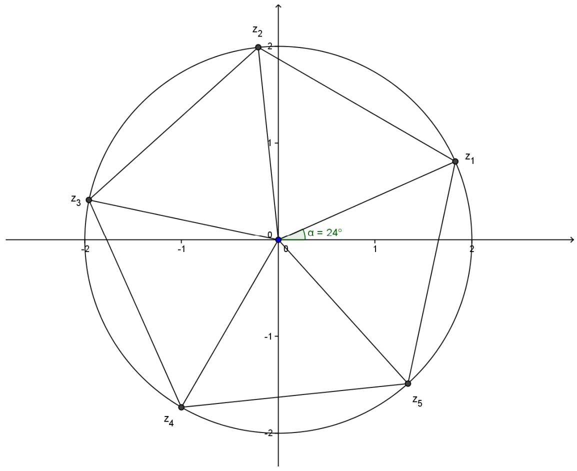
$z^5 = 16\cdot(1 - i\sqrt{3})$

a = 32 cis(120°)

$\rho^5 = 32$ und damit $\rho = 2$

$$5\varphi = 120° + k\cdot 360°$$

$$\varphi = 24° + k\cdot 72°$$



Lösungen:

$z_k = 2$ cis (24° + k·72°)   k = 0, 1, 2, 3, 4

$z_1 = 1.827 + 0.813i$

$z_2 = -0.209 + 1.989i$

$z_3 = -1 - 1.732i$

$z_4 = -1.956 + 0.416i$

$z_5 = 1.338 - 1.486i$

Übungsbeispiele:

$z^4 = 16$ cis 60°	Lösungen: $z_k = 2$ cis (15° + k·90°) k = 0, 1, 2, 3
$z^3 = 1 + i$	Lösungen: $z_k = \sqrt{2}$ cis (15° + k·120°) k = 0, 1, 2, 3
$z^6 + 64 = 0$	Lösungen: $z_k = 2$ cis (30° + k·60°) k = 0, 1, 2, , ..5
	$\sqrt{3}+i,\ 2i,\ -\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}-i,\ -2i,\ \sqrt{3}-i$

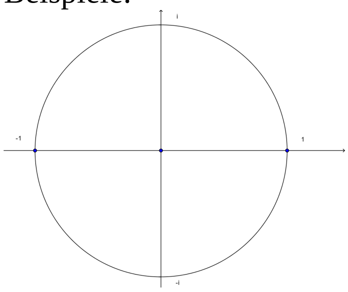
$$z^3\cdot(1-2i) = -8+16i$$

Spezialfall:

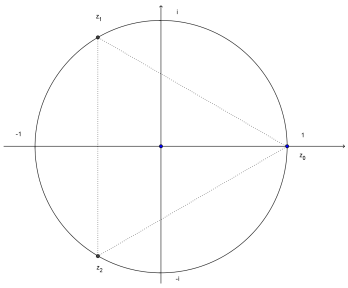
Die Gleichung $z^n = 1$ heisst Kreisteilungsgleichung. Die Lösungen heissen n-te Einheitswurzeln

$$z_k = cis\left(k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

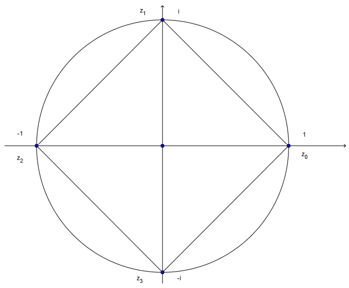
Beispiele:



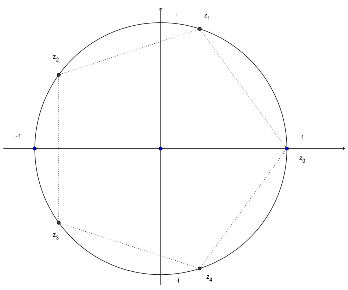
$z^2 = 1$



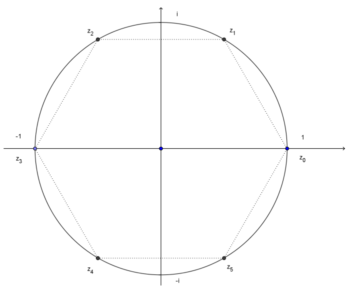
$z^3 = 1$



$z^4 = 1$



$z^5 = 1$



$z^6 = 1$

8. Gleichungen n. Grades

a) Quadratische Gleichungen

Spezialfall der reinquadratischen Gleichung : $z^2 = a \qquad a \in \mathbb{R}$

Beispiele:

$z^2 = -36 = (6i)^2$ Lösungen: $z_{1,2} = \pm 6i$

$z^2 = -5 = \left(\sqrt{5}\, i\right)^2$ Lösungen: $z_{1,2} = \pm\sqrt{5}\, i$

Spezialfall der reinquadratischen Gleichung: $z^2 = a \qquad a \in \mathbb{C}$

a wird in der Polarform dargestellt:

$z^2 = a = \rho \cdot cis\,\alpha$ Lösungen: $z_1 = \sqrt{\rho} \cdot cis\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $z_2 = \sqrt{\rho} \cdot cis\left(\frac{\alpha}{2} + 180°\right) = -z_1$

Beispiel:

$(2z - 3)^2 = -7$ oder

$2z - 3 = \pm\sqrt{7}i$ Lösungen $z_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$

Analog zur Herleitung der Auflösungsformel in R zeigt man mit quadratischer Ergänzung:

Satz:

Die quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ hat für

$D < 0$ zwei konjugiert komplexe Lösung $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$.

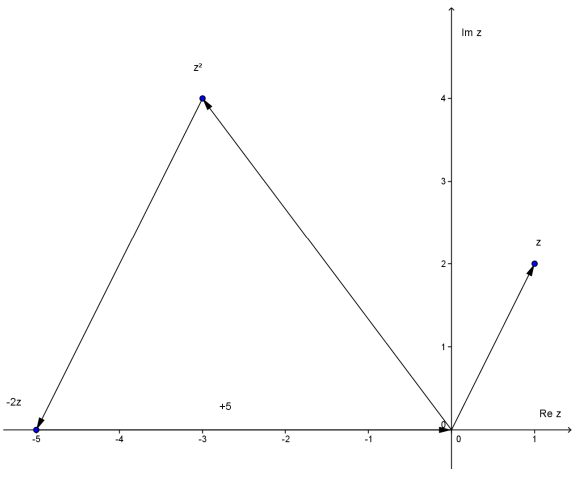
Beispiele:

$z^2 - 4z + 29 = 0$ $D = -100$ $z_{1,2} = 2 \pm 5i$

$z^2 - 6z + 10 = 0$ $D = -64$ $z_{1,2} = 3 \pm i$

$z^2 - 2z + 5 = 0$ $D = -16$ $z_{1,2} = 1 \pm 2i$

Die Skizze illustriert, dass 1 + 2i tatsächlich eine Lösung der quadratischen Gleichung ist:



Die Bestimmung der Lösungen einer quadratischen Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten kann analog zum reellen Fall auf die Berechnung von Quadratwurzeln zurückgeführt werden, denn sie kann mit quadratischer Ergänzung auf die folgende Form gebracht werden:

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{D}{a^2}$$

Das Problem, die quadratische Gleichung $w^2 = D = \alpha + i\beta$ kann auch ohne die Polarform gelöst werden. Nach einiger Rechnung ergeben sich die Lösungen:

$$w_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha\right)}+\frac{\beta}{|\beta|}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha\right)}\cdot i\right)$$

Beispiele:

$w^2 = 3-4i$ hat die Lösungen $\pm(2-i)$

Die quadratische Gleichung $z^2+2iz+(-4+4i)=0$ hat die Determinante D = 3 – 4i
Die Lösungen ergeben sich mit der Auflösungsformel zu
$z_1 = 2 - 2i$ und $z_2 = -2$.

Übungsaufgaben:

$z^2+(i-2)z+3-i=0$	D = -9	Lösungen $z_1 = 1 - 2i$ und $z_2 = 1 + i$
$z^2+(2i-3)z+5-i=0$	$D = (1 - 4i)^2 = -15 - 8i$	Lösungen $z_1 = 2 - 3i$ und $z_2 = 1 + i$

b) Gleichungen höheren Grades

Es gibt zwar noch für Gleichungen 3. und 4. Grades Auflösungsformeln. Niels Henrik Abel konnte beweisen, dass für n ≥ 5 keine allgemeine Auslösungsformel existiert. In der Praxis werden Näherungsverfahren wie z.B. das newtonverfahren verwendet.