10. Die Eulersche Relation

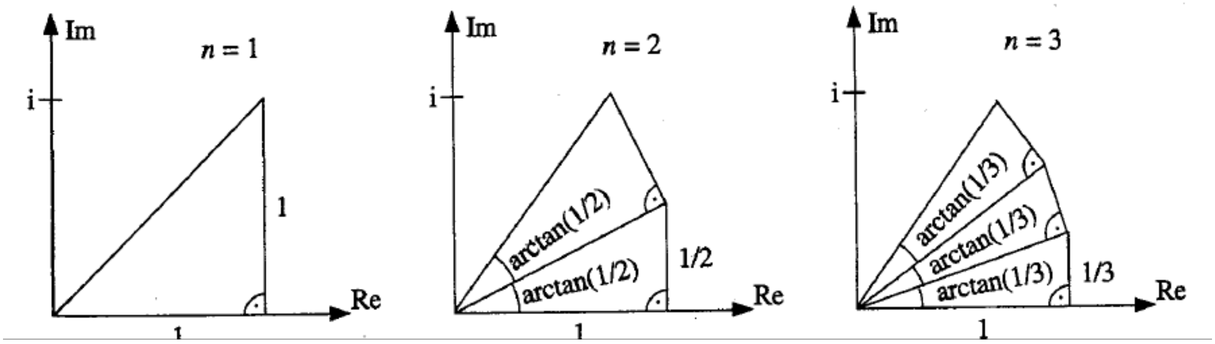
Die Definition der reellen Eulerschen Zahl als $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ kann folgendermassen für beliebige reelle Zahlen a erweitert werden:

$e^a = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$

Da alle Grundoperationen im Körper der reellen Zahlen uneingeschränkt auch im Komplexen gelten sollen (sogenanntes Permanenzprinzip), ist die Definition

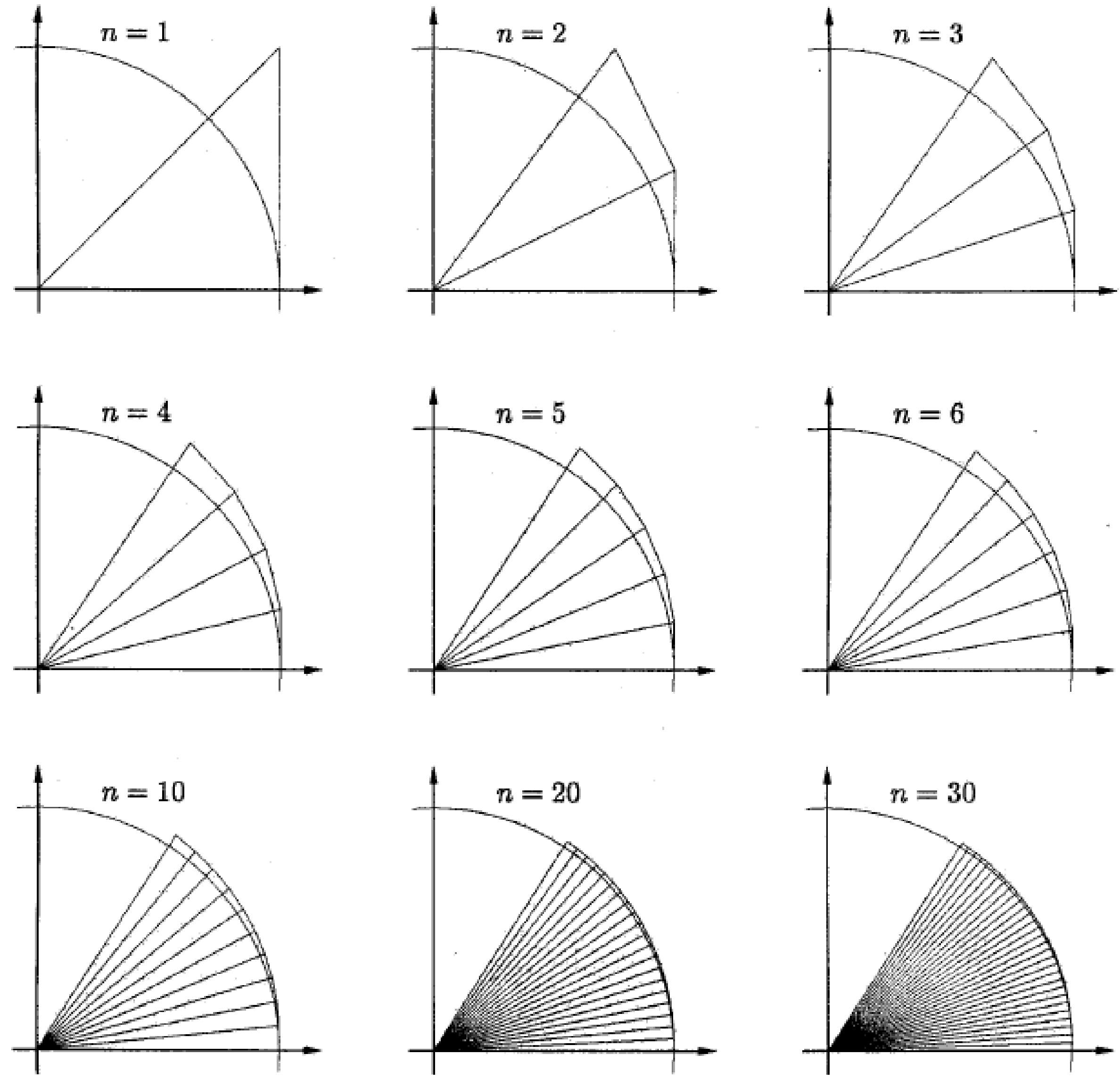
$e^i = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$ einleuchtend.

Stellt man (nach einer Idee von Gallin ETH VSMP Bulletin 10.2002) die Folge $\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$ für n = 1, 2, 3, ... in der Gauss'schen Ebene dar, so kann die Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi = cis\ \varphi$ plausibel gemacht werden.



Dazu werden mit wachsendem n rechtwinklige, zueinander ähnliche Dreiecke so aufeinander geschichtet, dass die Hypotenuse eines untern Dreiecks zur langen Kathete des obern wird.

Es ist einleuchtend, dass für grosse n die Hypotenusen zwar grösser als 1 sind, sich aber beliebig nahe an 1 bringen lassen.



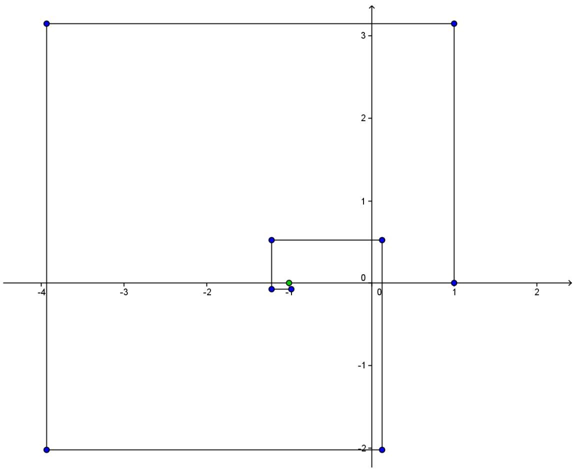
Die Figurenfolge zeigt, dass sich mit wachsendem n der Punkt $\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$ von aussen her dem Einheitskreis nähert und zwar zu jener Stelle mit dem
Bogenmass 1. Es gilt also
$e^i = \cos(1) + i \cdot \sin(1)$.

Potenziert man diese Gleichung mit φ so erhält man schliesslich
$\left(e^i\right)^\varphi = e^{i\varphi} = 1^\varphi \cdot \left(\cos(1\cdot\varphi) + i \cdot \sin(1\cdot\varphi)\right)$ was die Gleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = cis\,\varphi$ plausibel macht.
„Als Abkürzung hat $e^{i\varphi}$ erst noch den Vorteil, einen Buchstaben weniger als cis φ zu benötigen“ (Henrici ETH).
Wächst φ von 0 bis 2π so durchläuft $e^{i\varphi}$ damit den Einheitskreis.
Ein Beweis der Beziehung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ ist später mit der Theorie der Potenzreihen möglich.

$e^{i\varphi}$ = cos φ + i sin φ
Im Spezialfall φ = π erhält man

$e^{i\pi} + 1 = 0$
Diese Relation verbindet die fünf wichtigen Zahlen e, i, π, 1 und 0 und die Operationen Addition, Multiplikation und Potenzieren.

Es kann bewiesen werden, dass sich **$e^{i\pi}$** in folgende Potenzreihe entwickelt lässt:
$1 + i\pi - \frac{\pi^2}{2!} - i\frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^4}{4!} + i\frac{\pi^5}{5!} + ...$
Stellt man die ersten Glieder dieser Reihe in der Gauss'schen Ebene dar, so entsteht ein spiralförmiger Streckenzug, der sich dem „Grenzpunkt" -1 nähert.



Mit der komplexen Exponentialfunktion können nun die Operationen Multiplikation, Division und Potenzieren neu dargestellt werden:

1. $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
3. $z^n = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho e^{i\varphi n}$

Die Definition des Logarithmus für reelle Zahlen, kann ins Komplexe übertragen werden. Die Definition wird so gewählt, dass nach dem Permanenzprinzip die Logarithmengesetze gültig bleiben:

$$z = \rho e^{i(\varphi + k \cdot 2\pi)} \Rightarrow \ln z = \ln \rho + i \cdot (\varphi + k \cdot 2\pi) \quad z \neq 0$$

Der Logarithmus ist also im Komplexen mehrdeutig. Der zu k = 0 gehörende Wert heisst Hauptwert. Die übrigen Werte (Nebenwerte) ergeben sich durch Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2πi (Verschiebung in Richtung der imaginären Achse).

Beispiele:
$\ln 1 = \ln\left(e^{i(0+2k\pi)}\right) = 2k\pi i$
$\ln(-1) = \ln 1 + i(2k+1)\pi = i(2k+1)\pi$
$\ln(2i) = \ln 2 + i\left(2k + \tfrac{1}{2}\right)\pi$

$\ln(-8+6i) = \ln 10 + i(2.5 + 2k\pi)$

$\ln\left(-\sqrt{3}+i\right) = \ln 2 + i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$

Allgemein:

$\ln z = \ln \rho + i(\varphi + 2k\pi) = \ln|z| + i \cdot \arg z$

Als Spezialfall sei erwähnt:

$i^i = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right)^i = e^{i^2\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi} \approx 0.2078... + 2k\pi$

Die Eulersche Relation ermöglicht auch die Darstellung der trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion; denn es gilt:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \ldots \ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

Eine weitere Anwendung der komplexen Zahlen ist die elegante Darstellung von harmonischen Schwingungen durch komplexe Zeiger.

Die Differential- und Integralrechnung kann auf die komplexen Zahlen übertragen werden. Dies führt zu einer der schönsten mathematischen Theorien, der sogenannten Funktionentheorie, die eigentlich „Theorie der Funktionen komplexer Variablen“ heissen sollte.