3. Die Kreisinversion

3.1. Definition

Die Abbildung

$$z \to w = \frac{1}{\bar{z}}$$

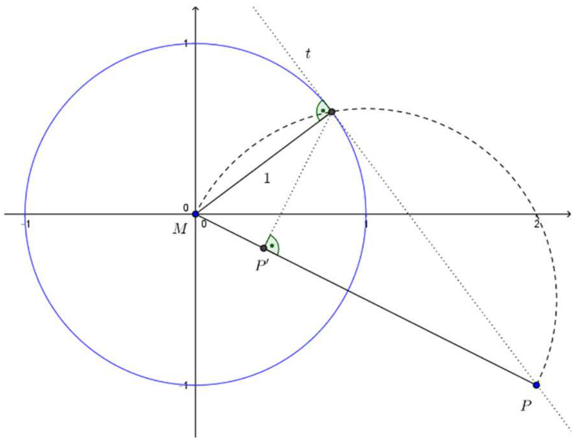
ordnet der Zahl $z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot cis\varphi$ das folgende Bild zu

$$w = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r \cdot e^{-i\varphi}} = \frac{1}{r \cdot cis(-\varphi)} = \frac{1}{r} \cdot e^{i\varphi} = \frac{1}{r} \cdot cis\varphi$$

Die Konstruktion des Bildpunkts besteht also aus zwei Schritten:
Der Punkt $z = r \cdot e^{i\varphi}$ wird in den Bildpunkt abgebildet, der in gleicher Richtung wie z liegt und dessen Abstand gerade gleich dem Kehrwert des bisherigen Abstands ist. Diese Abbildung heisst Inversion am Einheitskreis.

Die Grundkonstruktion:

Der Abstand des Bildpunkts P´ ist nach dem Kathetensatz gleich dem Kehrwert des ursprünglichen Abstands. Ein Punkt ausserhalb des Einheitskreises wird also in einen Punkt im Innern abgebildet und umgekehrt. Die Punkte auf dem Inversionskreis = Einheitskreis bleiben fest. Die Abbildung ist involutorisch (zu sich selbst invers. Ist P´ das Bild von P, dann ist P auch das Bild von P´.



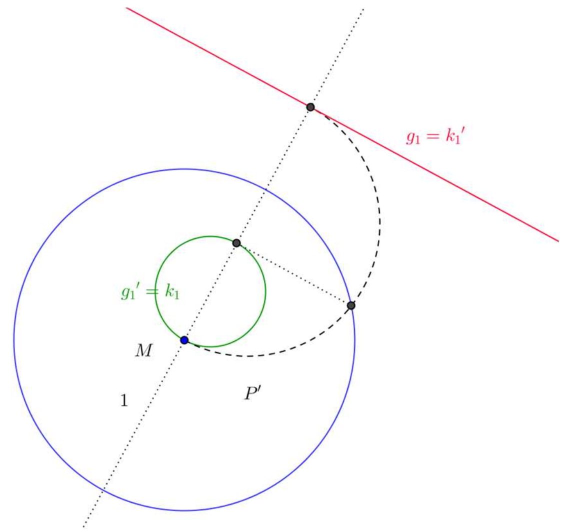
Bemerkung 1
P´ liegt auf der Polaren von P bezüglich des Inversionskreises.

Bemerkung 2
Bei der in 4. betrachteten Abbildung

$$z \to w = \frac{1}{z}$$

kommt zur Kreisinversion eine Spiegelung des Punktes an der reellen Achse dazu. Die folgenden vier Eigenschaften gelten auch für diese Abbildung

3.2 Eigenschaften



3.2.1 Bilder von Geraden

1)

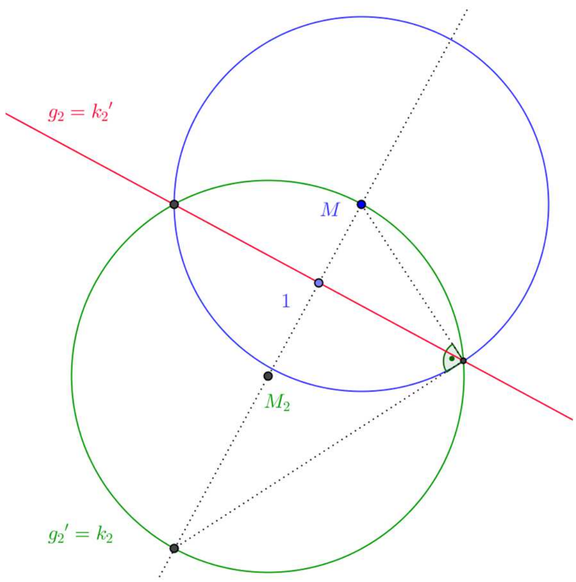
Die Gerade geht durch den Mittelpunkt des Inversionskreises.

In diesem Fall ist die Gerade eine Fixgerade (aber keine Fixpunktgerade, da Inneres und äusseres vertauscht werden.

2)

Eine Gerade, die nicht durch M geht wird in einen Kreis durch M abgebildet, dessen Mittelpunkt M_1 auf dem Lot von M auf g liegt.

3.2.2 Bilder von Kreisen



Da die Abbildung zu sich selbst invers ist (involutorisch ist), gilt auch:

3)

Das Bild eines Kreises k_1 durch M ist eine Gerade $k_1´$, die nicht durch M geht.

4)

Das Bild eines Kreises, der nicht durch M geht, ist ein Kreis, der nicht durch M geht.

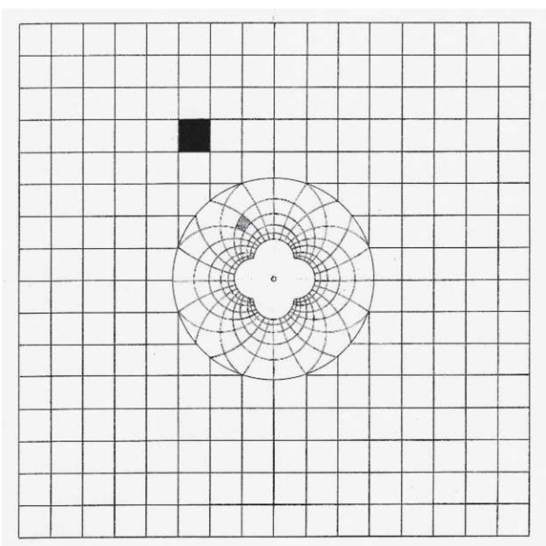
Übungsaufgabe:

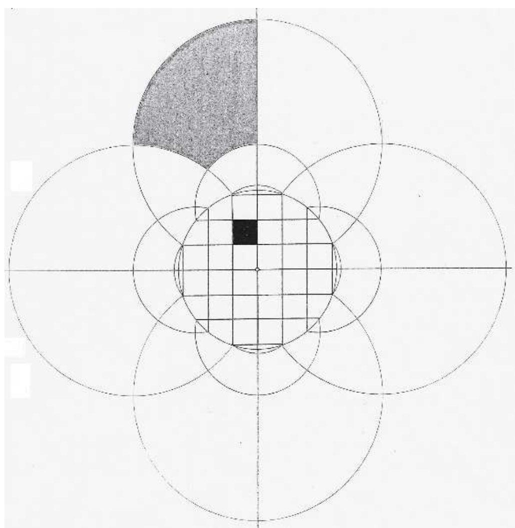
Welche Bilder ergeben sich, wenn die Gerade bzw. der Kreis den Inversionskreis

a) meidet

b) berührt?

Bild eines Quadratgitternetzes bei Inversion (ac)





Für den rechnerischen Beweis der Eigenschaften 1) bis 4) werden die folgenden Gleichungen einer Geraden bzw. eines Kreises in komplexer Form verwendet.

Die **Gleichung einer Geraden** ax + by + c = 0 in komplexer Form:

Durch Addition von $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ erhält man
$x = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})\ und\ y = Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = -\frac{1}{2}i(z - \bar{z})$
Einsetzen in die Geradengleichung ergibt:
$a \cdot \frac{1}{2} \cdot (z + \bar{z}) + b \cdot \frac{1}{2i} \cdot (z - \bar{z}) + c = \frac{a}{2} \cdot (z + \bar{z}) - \frac{b}{2} i(z - \bar{z}) + c = 0$
umgeformt zu
$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} i\right) \cdot z + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} i\right) \cdot \bar{z} + c = 0$
und daraus
$\bar{p}z + p\bar{z} + c = 0\ \ mit\ p = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} i\ und\ \bar{p} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} i \quad c \epsilon R$

Die **Kreisgleichung** in komplexer Form:
Ausmultiplizieren det Gleichung
$|z - m|^2 = (z - m) \cdot (\bar{z} - \bar{m}) = r^2$

führt auf
$z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + (m\bar{m} - r^2) = 0)$

und schliesslich auf
$z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0\ mit\ c = m\bar{m} - r^2\ c\epsilon R^+$

Beispiel:
m = 3 + 4i , r = 3 $\qquad c = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) - 3^2 = 25 - 9 = 16$

$z\bar{z} - (3 - 4i)z - (3 + 4i)\bar{z} + 16 = 0$

Rechnerischer Beweis de Eigenschaften 1) bis 4).

Bild einer Geraden
$\bar{p}z + p\bar{z} + c = 0 \qquad c\epsilon R,\ p, z\epsilon C$

Einsetzen von $z = \frac{1}{w}$ in die Geradengleichung führt auf
$\bar{p} \cdot \frac{1}{w} + p \cdot \frac{1}{\overline{w}} + c = 0$
oder nach Multiplikation mit $w\overline{w}$ auf
$\bar{p} \cdot \overline{w} + p \cdot w + cw\overline{w} = 0$
oder
$cw\overline{w} + \bar{p} \cdot \overline{w} + p \cdot w = 0$

Fallunterscheidung:

c = 0	$\bar{p} \cdot \overline{w} + p \cdot w = 0$	das Bild ist eine Gerade durch O
c ≠ 0	$w\overline{w} + \frac{\bar{p}}{c} \cdot \overline{w} + \frac{p}{c} \cdot w = 0$	das Bild ist ein Kreis durch O mit $r^2 = m\overline{m} - c$

Bild eines Kreises
$z\bar{z} - \overline{m}z - m\bar{z} + c = 0 \qquad c\epsilon R, m, z\epsilon C$
Mit $z = \frac{1}{w}$ folgt daraus
$\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\overline{w}} - \overline{m} \cdot \frac{1}{w} - m \cdot \frac{1}{\overline{w}} + c = 0$
oder nach Multiplikation mit $w\overline{w}$
$cw\overline{w} - m \cdot w - \overline{m} \cdot \overline{w} + 1 = 0$

Fallunterscheidung:

c = 0	$m \cdot w + \overline{m} \cdot \overline{w} - 1 = 0$	das Bild ist eine Gerade nicht durch O
c ≠ 0	$w\overline{w} - \frac{m}{c} \cdot w - \frac{\overline{m}}{c} \cdot \overline{w} + \frac{1}{c} = 0$	das Bild ist ein Kreis nicht durch O

Spezialfall:
Kreise um das Inversionszentrum O werden in Kreise um O mit reziprokem Radius abgebildet.

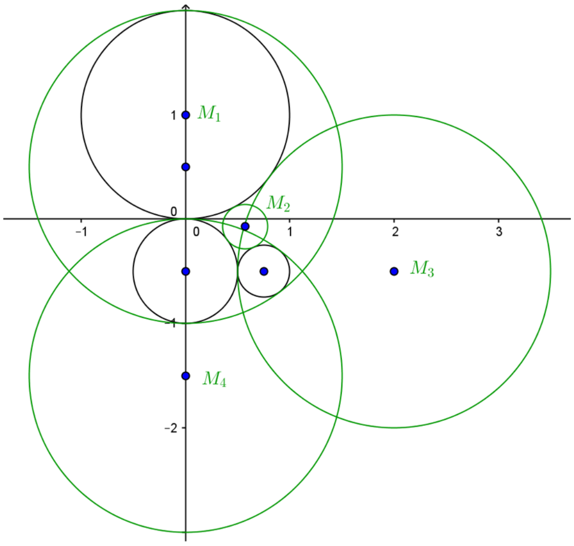
3.3 Das Apollonische Berührungsproblem (Apollonius von Perge (ca. 262 – 190 v. Chr.)

Die Eigenschaften der Inversion ermöglichen die Konstruktion des Apollonischen Berührungsproblems.

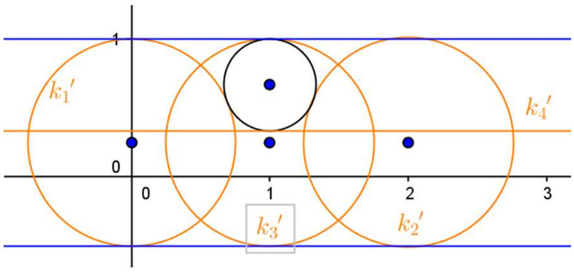
Aufgabe:
Zu drei gegebenen Kreisen ist ein vierter Kreis gesucht, der alle drei Kreise berührt.
Beispiel:

$c_1\colon |z-i| = 1$ $\quad$ $c_2\colon \left|z+\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$ $\quad$ $c_3\colon \left|z-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{4}$

z-Ebene



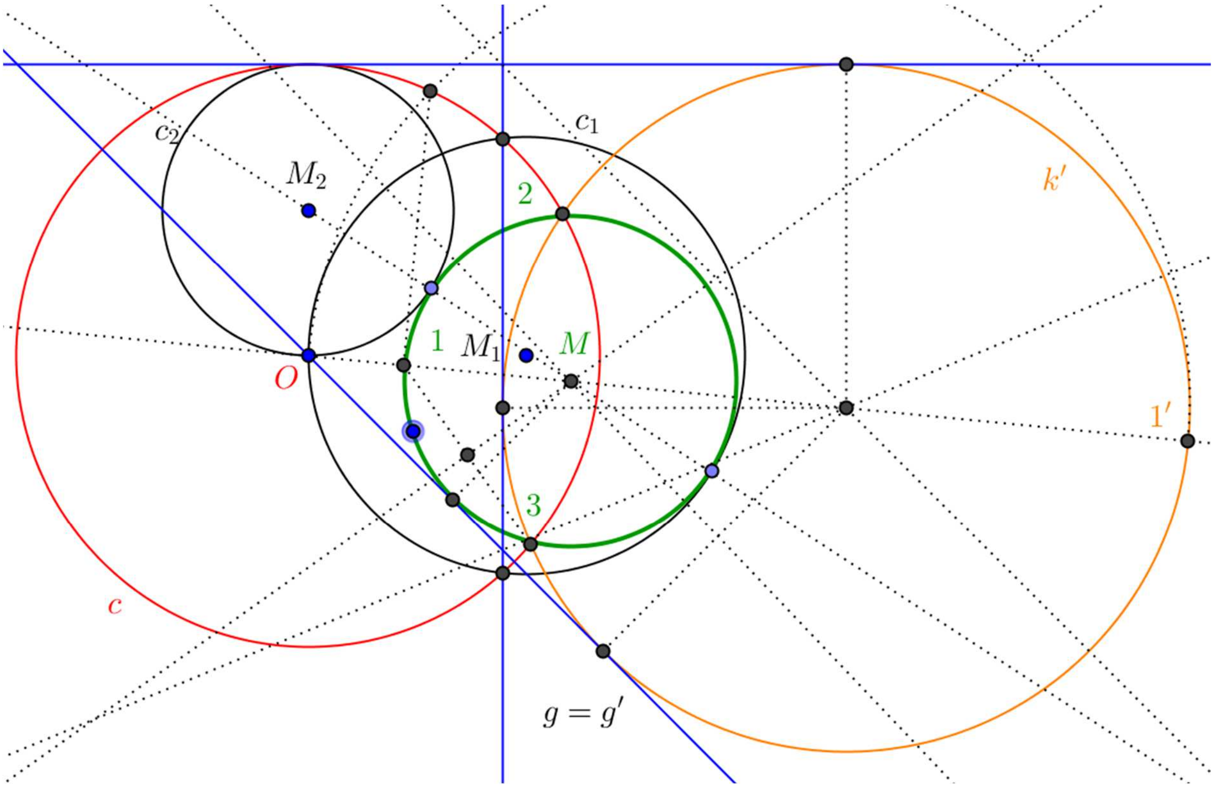
w-Ebene



Die Kreise c_1 und c_2 berühren sich im Nullpunkt O, der als Mittelpunkt des Inversionskreises (er ist nicht dargestellt) gewählt wird. Die Bilder der zwei sich im Inversionszentrum berührenden Kreise sind in der w-Ebene zwei parallele Geraden (blau). Im Beispiel existieren vier Lösungen (eine davon eine Gerade, orange), die den dritten Kreis berühren. Ihre Mittelpunkte liegen auf der Mittelparallelen mit gegebenem Abstand. Die Lösungen in der z-Ebene (grün) ergeben sich durch Kreisinversion.

Bemerkung:
Im allgemeinen Fall können die Radien der drei Kreise so verkleinert oder vergrössert werden, dass sich zwei Kreise berühren. Ihr Berührungspunkt wird als Inversionskreiszentrum gewählt. Nach der Lösung dieses neuen Problems wird die Radiusveränderung rückgängig gemacht.
Je nach der Disposition hat das Problem
keine (drei konzentrische Kreise mit verschiedenen Radien)
oder maximal acht Lösungen (Berührung von aussen (1), Berührung von innen (1), Berührung eines Kreises von innen, zweier Kreise von aussen(3), Berührung zweier Kreise von innen, eines Kreises von aussen(3).

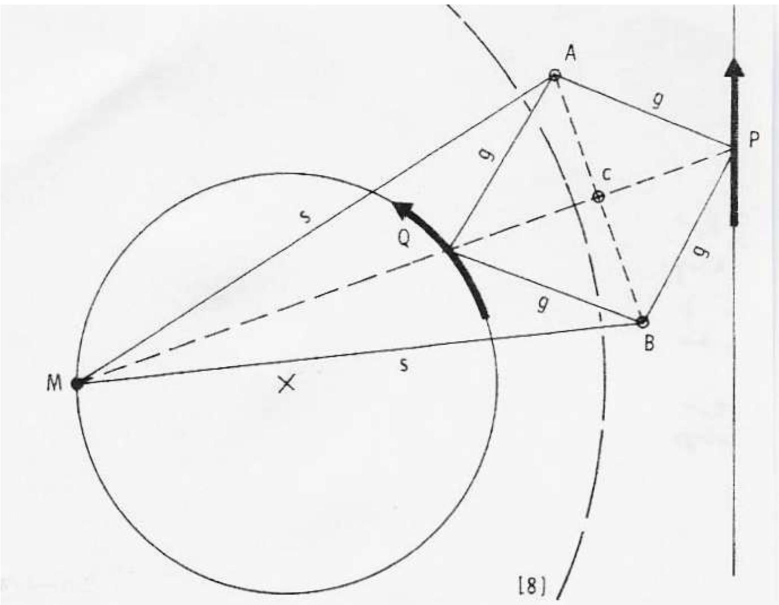
Übungsaufgabe: siehe auch Deller/Gebauer/Zinn: Algebra, Orell Füssli
Gegeben ist die Gerade g: $x + y = 0$ und die beiden Kreise
c_1: $M_1(3, 0)$, $r_1 = 3$ und c_2: $M_2(0, 2)$, $r_2 = 2$. Konstruiere einen Kreis, der die Gerade g und die Kreise c_1 von innen und c_2 von aussen berührt.



Inversion der Kreise c_1 und c_2 (schwarz) und der Geraden g am Inversionskreis c (rot) führt auf die blau dargestellten Geraden. Der Mittelpunkt M´ des Kreises k´ (orange), welcher die drei Geraden berührt, liegt auf den Winkelhalbierenden. Der gesuchte Kreis (grün) geht durch die Schnittpunkte 2 und 3 von k´ mit dem Inversionskreis c. Ein dritter Kreispunkt 1 ergibt sich als Bild des Punktes 1´ von k´. Damit ist der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten bestimmt.

Der Inversor von Peaucelier

Es handelt sich um ein Gerät, das eine Kreisbewegung in eine lineare Bewegung umsetzt und umgekehrt eine lineare Bewegung in eine Kreisbewegung. (→ Wikipedia)



In der Abbildung sind MA und MB Stangen, die mit der Gelenkraute PAQB verbunden sind. Bewegt sich P auf einer Geraden, dann beschreibt Q eine kreisförmige Bewegung (und umgekehrt.

Begründung:

$$|MP| \cdot |MP| = |MC + CP| \cdot |MC - CP| = |MC|^2 - |CP|^2$$
$$= s^2 - |AC|^2 - (g^2 - |AC|^2) = s^2 - g^2 = const.$$

Damit sind Q und P inverse Punkte bezüglich des Kreises um M mit dem Radius r mit

$r^2 = |MP| \cdot |MP| = s^2 - g^2 = (s + g)(s - g)$

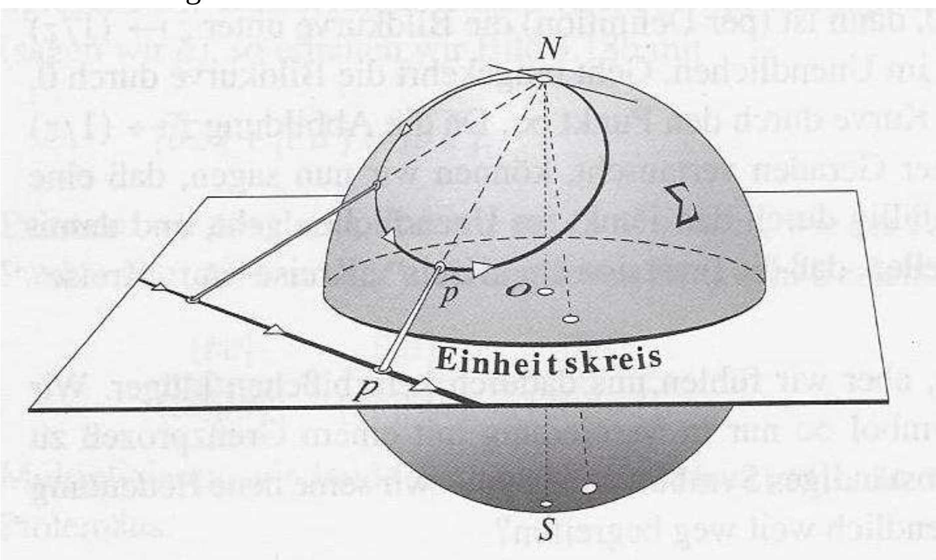
3.4 Die erweiterte komplexe Ebene

Bisher ordnet die Abbildung ist z = 0 kein Bildzugeordnet und der Ursprung ist auch nicht unter den Bildpunkten. Entfernt sich aber z immer weiter vom Ursprung, so scheint sich z immer mehr unabhängig von der Richtung einem einzelnen Punkt im Unendlichen, bezeichnet mit ∞ zu nähern, während sein Bild $\frac{1}{z}$ sich immer mehr 0 nähert und deshalb als Bild des unendlich fernen Punktes aufgefasst werden kann.

Man erhält so die erweiterte komplexe Ebene $\bar{C} = C \cup \{\infty\}$ in der per definition gelten soll: $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$.

Geht eine Kurve durch z = 0, dann geht bei der Abbildung $z \rightarrow \frac{1}{z}$ eine Kurve durch ∞ und geht eine Bildkurve durch 0, dann geht die ursprüngliche Kurve durch den Punkt ∞.
Da die Abbildung einen Kreis durch O mit einer Geraden vertauscht, kann eine Gerade als Kreis aufgefasst werden kann, der durch ∞ geht. Die Inversion bildet somit in einem erweiterten Sinn „Kreise“ in „Kreise“ ab.

Bemerkung:
Die Idee kann mit der so genannten stereografischen Projektion besser verstanden werden. Sie bildet eine Kugel auf die Äquatorebene ab. Der Nordpol kann als Bild des unendlich fernen Punktes ∞ aufgefasst werden.



Wegen der Beziehung zwischen der Kreisinversion und der Stereografischen Projektion ist auch einsichtig, dass das Bild einer Geraden g ein Kreis durch den „Nordpol“ N ist. Dass das Bild eines beliebigen Kreises wieder ein Kreis auf der Kugel ist, ist schwieriger zu beweisen.

Da die Kreistangente in N ist zudem parallel zur ursprünglichen Geraden. Deshalb ist das Bild zweier sich schneidender Geraden gleich gross. Die Abbildung ist winkeltreu

4. Die Möbiustransformation (gebrochen lineare Funktion)

Die gebrochen lineare Funktion

$$z \to w = \frac{az+b}{cz+d} \quad ad - bc \neq 0, c \neq 0$$

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich die Abbildung aus ganzen linearen Funktionen und der Funktion

$$z \to w = \frac{1}{z}$$

zusammensetzen lässt. Daraus folgt, dass die Abbildung ebenfalls kreistreu und winkeltreu ist.

Die Idee besteht darin, den Zähler zunächst dem Nenner anzupassen. Wegen der Umformung

$$az = az + \frac{ad}{c} - \frac{ad}{c} = \frac{a}{c} \cdot (cz+d) - \frac{ad}{c}$$

kann die gebrochen lineare Funktion folgendermassn dargestellt werden:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c} \cdot (cz+d) - \frac{ad}{c} + b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{-ad+bc}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}$$

Das Bild bei einer Möbiustransformation kann damit aus den folgenden einfacheren Abbildungen zusammengesetzt werden:

$$z \to w_1 = cz + d \to w_2 = \frac{1}{w_1} \to w = \frac{bc - ad}{c} \cdot w_2 + \frac{a}{c}$$

also durch Hintereinanderausführen einer ganzen linearen Funktion, einer Reziprokfunktion und einer weiteren ganzen linearen Funktion. Dabei ist die Reziprokfunktion die Zusammensetzung einer Inversion (Spiegelung am Einheitskreis) und einer Spiegelung an der reellen Achse.

Bemerkung:

Eine genauere Untersuchung zeigt, dass von den vier Parametern nur drei wesentlich sind (multipliziert man Zähler und Nenner mit einem Faktor k, so ändert sich die Funktionsgleichung nicht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, kann deshalb $bc - ad = 1$ angenommen werden. Dies deutet bereits darauf hin, dass es genau eine Möbiusabbildung gibt, die drei vorgegebene Punkte in drei beliebige Bildpunkte überführt.

Beispiel:

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

Der Funktionsterm kann umgeformt werden zu:

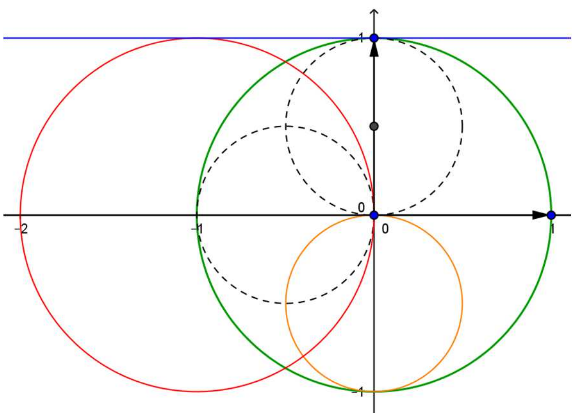
$$w = \frac{z - i}{z + i} = \frac{z + i - 2i}{z + i} = 1 - 2i \cdot \frac{1}{z + i}$$

$$z \to w_1 = z + i \to w_2 = \frac{1}{w_1} \to w = -2i \cdot w_2 + 1$$

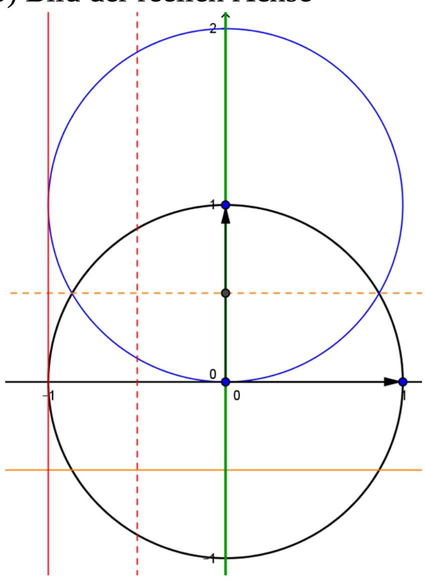
Das Bild der Möbiustransformation ist aus den folgenden Abbildungen zusammengesetzt:

1. Translation um i (blau)
2. Inversion am Einheitskreis und Spiegelung an der reellen Achse (orange)
3. Drehung mit Zentrum O mit dem Drehwinkel -$-\frac{\pi}{2}$ und Streckung mit dem Faktor 2 (rot)
4. Translation um 1in Richtung der reellen Achse (grün).

a) Bild des Einheitskreises



b) Bild der reellen Achse



Übungsaufgaben:

1.

Bestimme die Parameter a, b ∈ C so, dass die Abbildung

$$z \to w = a + \frac{b}{z}$$

$z_1 = 1$ in $w_1 = 2 - i$ und $z_2 = i$ in $w_2 = 1$ überführt.

Welche Punkte der Gauss´schen Zahlenebene werden in die imaginäre Achse übergeführt?

2.

Welche Möbiusabbildung bildet die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = -i$, $z_3 = -1$ in die Punkte $w_1 = i$, $w_2 = 1$, $w_3 = 0$ ab?

Lösungen:

1.

für a = 2 und b = -i wird die imaginäre Achse in den Kreis mit Mittelpunkt M(0, ¼) und Radius r = ¼ abgebildet.

2.

Ansatz:

$$w = \frac{z+1}{cz+d}$$

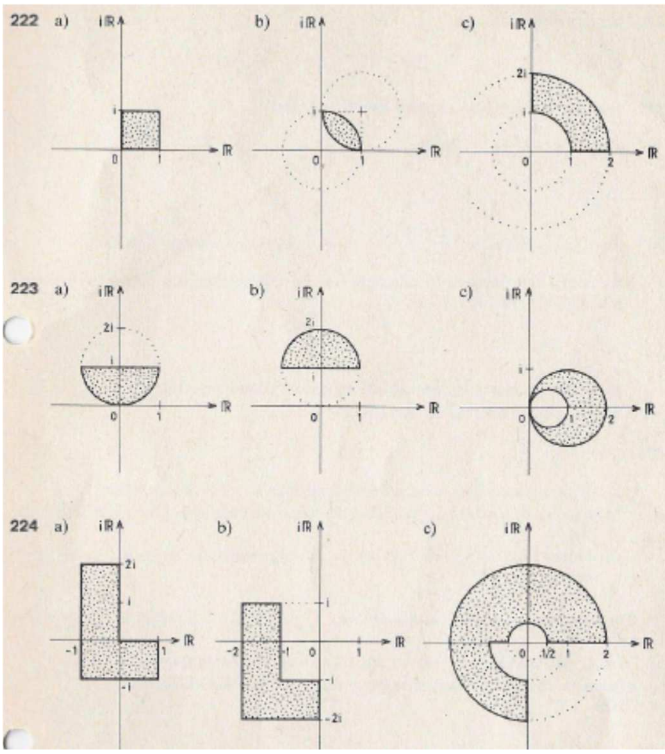
Lösung:

$$w = i \cdot \frac{1+z}{1-z}$$

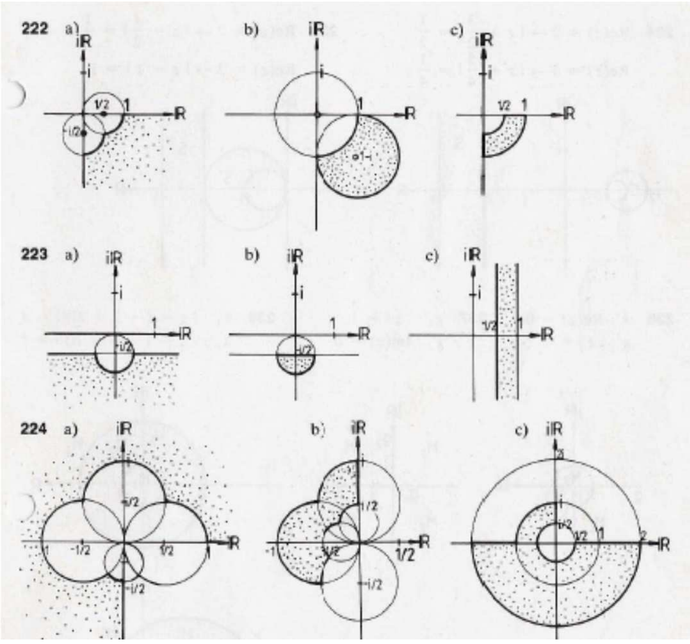
Übungsaufgabe:

Bestimme in den folgenden Fällen das Lösungsgebiet bei der Abbildung

$$z \to w = \frac{1}{z}$$



Lösungen:



Literatur:

T. Needham: Anschauliche Funktionentheorie, Oldenbourg 3-486-2478-3