Matrizenrechnung

1. Matrizen

Matrizen sind bereits im Kapitel „Lineare Gleichungssysteme“ aufgetreten.
Unter einer (m × n) -Matrix **A** verstehen wir ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten.
Der 1. Index bezeichnet die Zeile, der 2. Index die Spalte.
Das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte wird mit a_{ij} bezeichnet.

$$\begin{array}{cl} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \\ k\text{-te Spalte} & \end{array}$$

Besteht eine Matrix nur aus einer Spalte (Zeile), so spricht man auch von einem Spaltenvektor (Zeilenvektor).

Sofern die Anzahl der Zeilen bzw. der Spalten übereinstimmt, werden Addition und Subtraktion elementweise definiert. Ist c ein Skalar und **A** eine Matrix, dann versteht man unter der Matrix c**A** die Matrix, die aus **A** durch Multiplikation jedes Elements von **A** mit der Zahl c entsteht.

2. Multiplikation von Matrizen

Die Multiplikation ist erklärt, sofern die Anzahl der Spalten von **A** mit der Anzahl der Zeilen von **B** übereinstimmt.
Das Element c_{ij} der Produktmatrix **C** = **AB** ist gleich dem Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors mit dem j-ten Spaltenvektor.

Beispiel:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

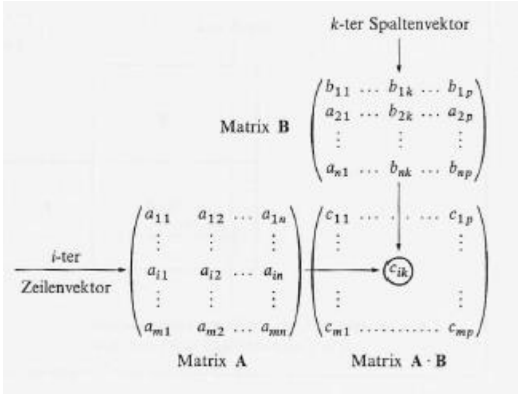
A: 2 Zeilen, 4 Spalten
B: 4 Zeilen, 3 Spalten
AB: 2 Zeilen, 3 Spalten

Definition:

Ist **A** = (a_{ik}) eine $(m \times n)$-Matrix mit
m Zeilen und n Spalten und
B = (b_{ik}) eine $(n \times p)$-Matrix mit n Zeilen
und p Spalten, dann heisst die Matrix
C = **AB** = (c_{ik}) mit

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

das Produkt der Matrizen **A** und **B**.



Bemerkungen:
a)
Die Produktbildung ist also nur möglich, wenn die Spaltenzahl von **A** mit der Zeilenzahl von **B** übereinstimmt.
b)
Die Produktmatrix hat m Zeilen und p Spalten.
c)
Die Multiplikation von Matrizen ist i.a. nicht kommutativ, wie das folgende Beispiel zeigt:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Das Beispiel zeigt ausserdem, dass das Produkt zweier Matrizen die Nullmatrix sein kann, ohne dass ein Faktor die Nullmatrix ist.

Aufgabe:
Gegeben ist die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
Gesucht ist eine Matrix **B** mit lauter von 0 verschiedenen Elementen so, dass das Produkt die Nullmatrix $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist.
Lösung:
$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ oder allgemeiner $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$

Übungsaufgaben:
Bestimme die folgenden Matrizenprodukte
a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 10 & 2 \\ 12 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

c)

(12)

3. Elementarmatrizen

Die beim Gauss-Algorithmus angewendeten Äquivalenzumformungen können auch als Multiplikation der Matrix mit einer geeigneten Elementarmatrix aufgefasst werden:

Multiplikation der 2. Zeile mit 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ 3\,m_{2,1} & 3\,m_{2,2} \end{bmatrix}$$

Addition der mit 4 multiplizierten 3. Zeile zur 1. Zeile

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} + 4\,m_{3,1} & m_{1,2} + 4\,m_{3,2} & m_{1,3} + 4\,m_{3,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

Vertauschen der 2. und 4. Zeile

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \end{bmatrix}$$

Beispiel:
Wird die Matrix

A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ mit der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ multipliziert, dann entsteht die Produktmatrix aus **A** durch Addition der mit 3 multiplizierten ersten Zeile zur dritten

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

Übungsaufgaben:
Bestimme eine 4 × 4 Matrix so, dass der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

in die folgenden Vektoren übergeht:

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_2 \\ v_4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \end{pmatrix}$

Lösungen:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Lineare Gleichungssysteme in Matrixform

Ein lineares Gleichungssystem mit m linearen Gleichungen und n Unbekannten

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

kann damit in der folgenden Matrixform beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Bezeichnet man die Koeffizientenmatrix mit **A**, den Spaltenvektor der Unbekannten mit $\vec{\mathbf{x}}$ und den Spaltenvektor der Konstanten mit $\vec{\mathrm{b}}$, dann kann das System mit einer einzigen Matrixgleichung beschrieben werden:

$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathrm{b}}$

Es wird sich zeigen, dass für gewisse quadratische Matrizen, die regulären, diese Gleichung mit der sogenannten inversen Matrix nach dem Spaltenvektor $\vec{\mathbf{x}}$ aufgelöst werden kann.
Bezeichnet man den i-ten Spaltenvektor der Matrix mit $\overrightarrow{a_i}$,dann kann das Produkt der Matrix **A** mit dem Vektor $\vec{\mathbf{x}}$ auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = x_1\,\overrightarrow{a_1} + x_2\,\overrightarrow{a_2} + \cdots + x_n\,\overrightarrow{a_n}$

5. Die inverse Matrix einer quadratischen Matrix

Wir betrachten im Folgenden quadratische (2×2)-, (3×3)-, allgemein $(n \times n)$- Matrizen.
Die Matrix E, bei der in den Hauptdiagonalen lauter Einsen stehen und sonst Nullen heisst Einheitsmatrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \ldots$$

> Definition:
> Gibt es zu einer quadratischen Matrix **A** eine Matrix **B** mit **AB** = **BA** = **E**, dann heisst **A** invertierbar und **B** heisst die zu **A** inverse Matrix.

Die inverse Matrix ist eindeutig bestimmt.
Gäbe es nämlich zu einer Matrix **A** zwei verschiedene inverse Matrizen **B** und **C**, dann würde gelten
BA = **E.**
Multipliziert man diese Gleichung von rechts mit **C**, dann folgt
(**BA**)**C** = **EC** = **C**
Wegen des assoziativen Gesetzes gilt aber auch
B(**AC**) = **BE** = **B** und daraus folgt **B** = **C**.

Die damit eindeutig bestimmte inverse Matrix von **A** wird mit $\mathbf{A}^{-1}$ bezeichnet.

Beispiel:
Mit dem im folgenden Abschnitt beschriebenen Verfahren ergibt sich zu

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ die inverse Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kontrolle: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Damit kann das folgende Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} x_1 \qquad\quad +x_3 = 5 \\ -2x_1+x_2+4x_3 = 20 \\ x_1 \qquad\quad +2x_3 = 10 \end{array} \right|$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

als Matrizenproblem formuliert werden:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man diese Gleichung von links mit $\mathbf{A}^{-1}$, so ergibt sich die gesuchte Lösung zu:

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Folgerung:
Das zugehörige homogene Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} x_1 \qquad\quad + x_3 = 0 \\ -2x_1+x_2+4x_3 = 0 \\ -\ x_1 \qquad\quad +2x_3 = 0 \end{array} \right|$$ hat nur die triviale Lösung.

Das Problem, zu einer regulären Matrix A die inverse Matrix A^{-1} zu berechnen, wird im folgenden Abschnitt gelöst.

6. Berechnung der inversen Matrix nach Gauss-Jordan

Im Spezialfall einer zweireihigen Matrix gilt der folgende

Satz:
Die Matrix
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
ist für ad – bc ≠ 0 invertierbar und es gilt:
$A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Der Satz folgt als Spezialfall im Kapitel „Determinanten“ (Abschnitt „Reguläre Matrizen“).

Aufgabe:
Löse die Matrizengleichung **AX** = **B** mit
$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Wegen $\det A = 1$ ergibt sich A^{-1} zu
$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und damit
$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Im allgemeinen Fall sei die (n × n) - Matrix A gegeben. Das folgende Beispiel illustriert das Verfahren zur Bestimmung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$.
Die Idee besteht darin, die drei Gleichungssysteme für die 1. bzw. 2. und 3. Spalte der inversen Matrix simultan nach Gauss zu bestimmen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 8 \quad \cdot 2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \textit{vertauschen} \\ \textit{vertauschen} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot (-4) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \cdot 2 \cdot 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \text{ und damit } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Kontrolle: $A \cdot A^{-1} = E$
Falls sich eine Nullzeile ergibt, dann ist **A** nicht invertierbar.

Andere Interpretation:
Die Folge der elementaren Zeilenumformungen, die **A** in die Einheitsmatrix überführt, verwandelt die Einheitsmatrix umgekehrt in die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$

Bemerkung:
Die Beispiele wurden so gewählt, dass die Komponenten ganzzahlig sind. Dieses „Rätsel“ wird im Kapitel „Determinanten“ im Abschnitt „Reguläre Matrizen“gelöst.

Übungsaufgaben:
Bestimme zu den folgenden Matrizen die inverse Matrix

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Lösungen:
a)

$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Zusammenfassung:

Für eine (n × n) Matrix **A** sind folgende Aussagen äquivalent:
a) **A** ist invertierbar
b) Das homogene lineare GLS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung
c) Die reduzierte Zeilenstufenform von **A** ist die n-te Einheitsmatrix
d) **A** lässt sich als Produkt von Elementarmatrizen schreiben.