Determinanten

Die Determinante einer quadratischen Matrix ist eine reelle Zahl. Sie ermöglicht insbesondere eine Aussage über die Existenz der inversen Matrix bzw. über die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen.

1. Berechnung von zweireihigen Determinanten

Bereits im Grundkurs sind Determinanten aufgetreten, nämlich bei der Cramerschen Regel (Algebra → Lineare Gleichungssysteme). Im Folgenden sind zusammenfassend einige Eigenschaften dargestellt.

Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \end{vmatrix}$$ wobei $a_{11} \neq 0$ oder $a_{12}x_2 \neq 0$ bzw. $a_{21} \neq 0$ oder $a_{22} \neq 0$

hat genau eine eindeutig bestimmte Lösung, wenn für die Determinante der Koeffizientenmatrix gilt:

$\det \boldsymbol{A} = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \neq 0$

In diesem Fall heisst die Matrix regulär.

Bemerkung:

Statt det **A** schreibt man auch kurz $|\boldsymbol{A}|$ oder $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Nach der aus dem Grundkurs bekannten Cramerschen Regel können die Lösungen des linearen Gleichungssystems als Quotient zweier Determinanten dargestellt werden:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Aus dem Kapitel „Vektorprodukt“ des Grundkurses ist zusätzlich bekannt, dass die beiden Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ der Koeffizientenmatrix **A** ein Parallelogramm aufspannen, dessen orientierter Inhalt gerade gleich $\det \boldsymbol{A}$ ist.

Die Beweise der folgenden Eigenschaften von zweireihigen Determinanten ergeben sich aus der Definition z.T. mit einigem Rechenaufwand.

1.

Die Einheitsmatrix E = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ hat die Determinante 1.

2.

Stimmen bei einer Determinante zwei Spalten (Zeilen) überein, dann hat die Determinante den Wert 0.

3.
Wird eine Spalte (Zeile) mit dem Faktor λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ d.h. bei einer Determinante kann ein gemeinsamer Faktor vor die Determinante „gezogen“ werden.

Beispiel:
$$\begin{vmatrix} -24 & 7 \\ -32 & 1 \end{vmatrix} = (-8) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-8) \cdot (3 - 28) = 200$$

4.
Die Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Spalte (Zeile) ein Vielfaches einer andern Spalte (Zeile) addiert wird.

Beispiel:
$$\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -24 - 5 = -29$$
Addiert man das 6-fache der 2. Spalte zur 1. Spalte, so verändert sich der Wert der Determinante nicht:
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 29 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 29 = -29$$

5.
Sind die Spalten (Zeilen) von **A** linear abhängig (d.h. ist der Rang von **A** kleiner als 2) dann ist der Wert der Determinante gleich 0.

Beispiele:
$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

6.
Vertauscht man zwei Spalten (Zeilen) von **A** so wechselt die Determinante das Vorzeichen.
$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7 - 12 = -19$$
$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 7 = 19$$

7.
Die Determinante einer Dreiecksmatrix oder sogar Diagonalmatrix ist das Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen.
$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15 \qquad \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ -8 & -5 \end{vmatrix} = 35 \qquad \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12$$

8.
Die Determinante eines Matrizenprodukts **AB** ist gleich dem Produkt der beiden Faktoren **A** und **B**

Beispiel:
$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad A\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 14 & 1 \\ -18 & -17 \end{vmatrix}$$
$$det\,\boldsymbol{A} = -22 \qquad det\boldsymbol{B} = 10 \qquad \det A\boldsymbol{B} = -220 = det\,\boldsymbol{A} \cdot det\boldsymbol{B}$$

2. Berechnung von dreireihigen Determinanten

Der Fall n = 3 wurde ebenfalls bereits im Kapitel Vektorrechnung („Spatprodukt“) gelöst. Dort wurde gezeigt, dass das orientierte Volumen eines Spats, das von den drei Spaltenvektoren der Matrix aufgespannt wird gilt:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Die dreireihige Determinante **A** kann also auf zweireihige Determinanten, die sogenannten Unterdeterminanten zurückgeführt werden. Diese entstehen aus der dreireihigen Determinante, indem man die erste Zeile und die j-te Spalte (j = 1, 2, 3) streicht. Bezeichnet man die Unterdeterminanten mit D_{11}, D_{12} und D_{13} dann gilt:

$$\det A = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}D_{11} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}D_{12} + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}D_{13}$$

Diese Aussage ist ein Spezialfall des sogenannten Laplace'schen Entwicklungssatzes. Sie gilt entsprechend auch für jede andere Zeile oder Spalte. Die alternierenden Vorzeichen bilden ein Schachbrettmuster.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Es empfiehlt sich eine Entwicklung nach der 2. Zeile, da D_{22} wegen $a_{22} = 0$ nicht berechnet werden muss.

$$D_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = 17 \qquad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 21$$

$$\det A = 4\cdot(-1)^{2+1}\cdot 17 + 2\cdot(-1)^{2+3}\cdot 21 = 4\cdot(-17) + 2\cdot(-21) = -110$$

Übungsaufgaben:

a)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & 10 & 19 \\ 3 & 17 & 30 \end{vmatrix}$$

b)

Es ist zu überprüfen, ob die die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

a)

$$\det A = +1\cdot(10\cdot 30 - 19\cdot 17) - 5\cdot(2\cdot 30 - 19\cdot 3) + 8\cdot(2\cdot 17 - 10\cdot 3) = -6$$

b) Die Determinante der folgenden Matrix ist 0.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Also sind die drei Vektoren linear abhängig, d.h. sie liegen parallel zur derselben Ebene.

3. Definition einer n-reihigen Determinante

Die Definition der Determinante kann nun rekursiv erfolgen, indem man die Berechnung einer n-reihigen Determinante durch ihre Entwicklung z.B. nach der ersten Zeile definiert.

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot (-1)^{1+k} \cdot D_{1k}$$

Allgemein gilt der folgende

Entwicklungssatz von Laplace:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot D_{ij}$$

Die Entwicklung gilt also auch, wenn statt nach der ersten Zeile nach einer beliebigen Zeile (oder Spalte) entwickelt wird. Die Unterdeterminanten D_{ij} entstehen aus der ursprünglichen Determinante, indem die i-te Zeile und die k-te Spalte gestrichen werden.

Beispiel:
Bei der Bestimmung von

$$det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

wird zweckmässigerweise nach der 2. Zeile entwickelt.

$$det\boldsymbol{A} = (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot D_{22} + (-1)^{2+2} \cdot a_{24} \cdot D_{24}$$

$$det\boldsymbol{A} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot 9 + 1 \cdot (-6) = 102$$

Entwicklung nach der 1. Spalte

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 + 13 + 1 = 9$$

Entwicklung nach der 2. Zeile

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6$$

Übungsaufgabe:
Bestimme die Determinante der folgenden Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Der Rechenaufwand ist minimal, wenn nach der 4. Spalte entwickelt wird:

$$det\boldsymbol{A} = 3 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 = 6$$

Die für zweireihige Determinanten gültigen Eigenschaften gelten sinngemäss auch für n-reihige Determinanten. Die z.T. aufwändigen Beweise sind in der Fachliteratur zu finden.

1.
Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn Zeilen und Spalten miteinander vertauscht werden d.h. es gilt:
$\det \boldsymbol{A^T} = \det \boldsymbol{A}$
wobei $\boldsymbol{A^T}$ die transponierte Matrix von $\boldsymbol{A}$ bedeutet.

2.
Beim Vertauschen zweier Zeilen (Spalten) ändert eine Determinante das Vorzeichen.

3.
Werden die Elemente einer Zeile (Spalte) mit einer reellen Zahl λ multipliziert, so wird die Determinante mit λ multipliziert.

4.
Eine Determinante hat den Wert Null, wenn eine Zeile (Spalte) als Linearkombination der übrigen Zeilen (Spalten) dargestellt werden kann.

5.
Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Zeile (Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer andern Zeile (Spalte) addiert wird.

6.
Für zwei beliebige n-reihige Matrizen A und B gilt der Multiplikationssatz von Cauchy:
$\det(\boldsymbol{AB}) = det\ \boldsymbol{A} \cdot det\ \boldsymbol{B}$

7.
Ist A eine Dreiecksmatrix dann ist ihre Determinante gleich dem Produkt ihrer Diagonalenelemente.
$det\ \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$

Beispiele zu 4.

a)
$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ der 2. Zeilenvektor ist der Nullvektor

b)
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 6 & -9 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ der 2. Zeilenvektor ist ein Vielfaches des 1. Zeilenvektors

c)
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 1 & 0 & 2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 & 2 & 8 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{vmatrix} = 0$

der 3. Spaltenvektor ist eine Linearkombination des 1. und 2. Spaltenvektors

Mit den sieben Eigenschaften und dem Entwicklungssatz ergibt sich eine weitere Möglichkeit Determinanten zu berechnen.

Beispiele:
a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

multipliziere die letzte Spalte mit (-1) und addiere sie zu den übrigen Spalten

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

addiere die 1., 2. 3. Spalte zur letzten Spalte, so erhält man eine Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist das Produkt der Diagonalenelemente $\det \boldsymbol{A} = -3$

b)

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Zur 1. Zeile wird das Doppelte der 4. Zeile addiert

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Die Determinante wird nach der 1. Zeile entwickelt

$$|\boldsymbol{A}| = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Die dreireihige Determinante wird nach der 3. Zeile entwickelt

$$|\boldsymbol{A}| = 4 \cdot (-1) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) \cdot (-3 - 4) = 28$$

Übungsaufgaben:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Tipp:
Addiere z.B. geeignete Vielfache der 1. Spalte zu den übrigen Spalten so, dass dort Nullen erscheinen.

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 5 \\ 6 & -6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Tipp:
Entwickle nach der 4. Spalte

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Lösungen:

a)
addiere zur 2. Spalte das (-3)-fache der 1. Spalte, die 1. Spalte zur 3. und das (-6)-fache der 1. Spalte zur 4. Spalte und entwickle anschliessend nach der 1. Spalte

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 7 & 23 \\ -2 & 4 & 1 & -9 \\ -2 & 3 & -1 & -8 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 7 & 23 \\ 4 & 1 & -9 \\ 3 & -1 & -8 \end{vmatrix} = -10$$

b)
-30

c)
26 (nach der 2. Zeile entwickeln)

d)
0 (geeignete Vielfache der 3. Zeile zur 1. bzw. 4 Zeile addieren ergibt viele Nullen

e)
$\det B = 6$ (Verallgemeinerung ?)

Es existiert auch die folgende
explizite **Formel zur Berechnung einer Determinante**:

$$\det A = \sum_{\pi} sgn(\pi) \cdot a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \ldots \cdot a_{n,\pi(n)}$$

dabei ist über alle Permutationen π der Zahlen 1, 2,….n zu summieren. Die Summe besteht also aus n! Summanden.
$sgn(\pi)$ ist + 1 für eine gerade, -1 für eine ungerade Permutation.
Bei den geraden Permutationen ist die Anzahl der Fehlstände gerade, bei einer ungeraden Permutation ist die Anzahl der Fehlstände ungerade.

Beispiele:
a)
Die Permutation:
$\begin{pmatrix} 1\;2\;3\;4 \\ 2\;4\;1\;3 \end{pmatrix}$ ist ungerade, denn es gibt 3 Fehlstände, nämlich 2 > 1, 4 > 1, 4 > 3.
b)
Die Permutation
$\begin{pmatrix} 1\;2\;3\;4 \\ 3\;4\;2\;1 \end{pmatrix}$ erfordert 5 Vertauschungen benachbarter Elemente, um sie in die natürliche Reihenfolge zu bringen.
3421 →3412→3142→1342→1324→1234

Beispiel:
zweireihige Matrix
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

2! Permutationen

1	2	$a_{11} \cdot a_{22}$	gerade Permutation	sgn π(1) = 1
2	1	$a_{12} \cdot a_{21}$	ungerade Permutation	sgn π(2) = -1

$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

Bemerkung:
Damit steht fest, dass die Sarrus'sche Regel nur im Fall n = 3 gelten kann, denn sie würde für n > 3 nur einen Teil der Permutationen umfassen.

4. Reguläre Matrizen

Definition:
Eine n-reihige quadratische Matrix heisst regulär, wenn ihre Determinante von 0 verschieden ist.
Es kann gezeigt werden, dass eine regulären Matrix A auch umkehrbar ist, d.h. es gilt:
$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ wo **E** die Einheitsmatrix bedeutet.

Als Folgerung der Eigenschaft
$\det(\boldsymbol{AB}) = det\, \boldsymbol{A} \cdot det\, \boldsymbol{B}$
gilt für die Determinante der inversen Matrix

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Die inverse Matrix kann nach dem Gauss-Algorithmus oder auch mit den bereits erwähnten (n – 1)-reihigen Unterdeterminanten D_{ik} nach dem folgenden Satz gebildet werden.

Satz:
Zu jeder regulären n-reihigen Matrix A existiert genau eine inverse Matrix A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots\ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots\ldots A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots\ldots A_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$$

Die Elemente D_{ik} entstehen aus det **A** , wenn die i –te Zeile und die k-te Spalte gestrichen werden.
Es ist zu beachten, dass in der i-ten Zeile und k-ten Spalte nicht das Element a_{ik} sondern das Element a_{ki} steht.

Folgerung:
Sind die Elemente der Matrix A ganzzahlig und gilt $\det A = \pm 1$, dann sind auch die Elemente der inversen Matrix ganzzahlig, womit das im Kapitel „Matrizen“ Abschnitt „Berechnung der inversen Matrix“ erwähnte „Rätsel“ gelöst ist.

Beispiele:
a)
zweireihige Matrizen (bereits erwähnt in „Matrizen“ Abschnitt „Berechnung der inversen“ Matrix“)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det A = ad - bc$

Die Unterdeterminanten sind in diesem einfachen Fall:
$D_{11} = d \qquad D_{12} = c \qquad D_{21} = b \qquad D_{22} = a$

Mit diesen Elementen wird nach der Vorzeichenregel die folgende Matrix gebildet

$\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Die Zeilen und Spalten werden vertauscht, die Matrix also transponiert:

$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Die Matrix ist noch durch die Determinante von A zu dividieren:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

b)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mit det A = -1

Die Unterdeterminanten ergeben sich zu

$D_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \qquad D_{12} = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = 2 \qquad D_{13} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 0$

$D_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ $D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2$ $D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$D_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4$ $D_{32}= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} = -7$ $D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 4$

Mit diesen Elementen wird nach der Vorzeichenregel die folgende Matrix gebildet

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & -(-7) & 4 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix ist zu transponieren, d.h. es sind Zeilen und Spalten zu vertauschen

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Da die Determinante den Wert -1 hat sind alle Elemente dieser Matrix noch durch (-1) zu dividieren, d.h. sie wechseln das Vorzeichen.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Multipliziert man zur Kontrolle A^{-1} mit A so erhält man wie erwartet die Einheitsmatrix I_3

$$A^{-1}\,A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Die Cramersche Regel

Ist die Koeffizientenmatrix A eines $(n \times n)$-Gleichungssystems regulär, d.h. ist $\det A \neq 0$, dann hat das System $A\vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung. Multipliziert man diese Gleichung von links mit A^{-1} so erhält man

$$\boldsymbol{A}^{-1}(A\vec{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{b}$$

Berechnet man die inverse Matrix mit den Unterdeterminanten, so ergibt sich die folgende

Cramersche Regel

Ein lineares $(n \times n)$-System $A\vec{x} = \vec{b}$ mit regulärer Koeffizientenmatrix **A** hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_i = \frac{D_i}{\det(A)} \qquad i = 0\;1, 2, \ldots, n$$

dabei bedeutet D_i die Hilfsdeterminante die aus det **A** hervorgeht, indem man die i-te Spalte durch die Absolutglieder c_1, c_2, …., c_n ersetzt.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = -5$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -10 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 20$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -10 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 25$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -10 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 15$$

$$x_1 = \frac{D_1}{\det(A)} = \frac{20}{-5} = -4 \qquad x_2 = \frac{D_2}{\det(A)} = \frac{25}{-5} = -5 \qquad x_3 = \frac{D_3}{\det(A)} = \frac{15}{-5} = -3$$

Das Gleichungssystem hat folglich die Lösung:

$x_1 = -4$ $\qquad x_2 = -5$ $\qquad x_3 = -3$

Übungsaufgabe:

Lösung des linearen Gleichungssystems mit der Cramerschen Regel:

$$\left| \begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 & = 3 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 & = 18 \\ 3x_1 + 13x_2 + 4x_3 & = 30 \end{array} \right|$$

Lösung:

Das quadratische System ist für eine reguläre Koeffizientenmatrix eindeutig lösbar.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 13 & 4 \end{vmatrix} = -8 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 18 & 7 & 4 \\ 30 & 13 & 4 \end{vmatrix} = 24 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 18 & 4 \\ 3 & 30 & 4 \end{vmatrix} = -24$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 18 \\ 3 & 13 & 30 \end{vmatrix} = 0$$

$x_1 = -3$ $\qquad x_2 = 3$ $\qquad x_3 = 0$

Bemerkung:

Die rechenaufwändige Cramersche Regel ist in der Theorie wichtig. Es wird nicht empfehlen, sie bei konkreten Beispielen zu verwenden.

6. Lösungsverhalten eins quadratischen linearen Gleichungssystems

6.1. Inhomogenes System $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$

Nach den Ausführungen im Abschnitt Gauss-Algorithmus ist ein inhomogenes lineares (n × n)-System $A\vec{x} = \vec{b}$ nur dann lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix **A** und die erweiterte Koeffizientenmatrix $\left(A\middle|\vec{b}\right)$ den gleichen Rang haben:
Rg(A) = Rg$\left(A\middle|\vec{b}\right) = r$

1. Fall
$\det\boldsymbol{A} \neq 0$ ↔ A ist regulär ↔ Rg(**A**) = Rg$\left(A\middle|\vec{b}\right) = n$: 6.1.1
$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung.

2. Fall:
$\det\boldsymbol{A} = 0$ ↔ A ist singulär

2.1
Rg(**A**) = Rg$\left(\boldsymbol{A}\middle|\vec{b}\right) = r <$ n
$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$ hat unendlich viele Lösungen mit n – r Parametern

2.2
Rg(**A**) ≠ Rg$\left(\boldsymbol{A}\middle|\vec{b}\right)$ 6.1.2
$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$ hat keine Lösung

6.2. Homogenes System $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$

1. Fall:
$\det\boldsymbol{A} \neq 0$ ↔ **A** ist regulär
$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ hat genau eine Lösung, nämlich die triviale $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ 6.2.1
2. Fall:
$\det A = 0$ ↔ A ist singulär
$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ hat neben der trivialen Lösung $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ 6.2.2
unendlich viele Lösungen mit n – r Parametern.

Beispiele:

zu 6.1.1:

$$\left|\begin{array}{rl} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 & = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 & = 3 \end{array}\right|$$

Die Koeffizientenmatrix **A** des Gleichungssystems ist regulär

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Mit dem Gauss-Algorithmus erhält man die erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Und nach Rückwärtseinsetzen die Lösung $x_1 = 6$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1$

zu 6.1.2:

$$\left|\begin{array}{ll} x_1+x_2 \ \ +x_3 & =1 \\ -x_1-2x_2+x_3 & =2 \\ x_1-x_2+5x_3 & =0 \end{array}\right|$$

Die Koeffizientenmatrix **A** des Gleichungssystems ist singulär

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$ damit ist Rg(A) < 3

die erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 3, denn sie hat eine von Null verschiedene Unterdeterminante

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$$

Das System ist unlösbar.

Dies ist auch mit dem Gaussalgorithmus zu erkennen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Offensichtlich ist der Rang der Koeffizientenmatrix r = 2, der Rang der erweiterten Matrix dagegen r = 3.

zu 6.2.1

$$\begin{array}{ll} 2x_1+3x_2 \ \ +2x_3 & =0 \\ -x_1-x_2-2x_3 & =0 \\ 3x_1+5x_2+5x_3 & =0 \end{array}$$

Die Koeffizientenmatrix **A** des Gleichungssystems ist regulär (vgl. 8.1.1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

das System hat folglich nur die triviale Lösung.

zu 6.2.2

$$\left|\begin{array}{ll} 2x_1+5x_2 \ -3x_3 & =0 \\ 4x_1-4x_2+x_3 & =0 \\ 4x_1-2x_2 & =0 \end{array}\right|$$

Die Koeffizientenmatrix **A** des homogenen Gleichungssystems ist singulär

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Das homogene System hat also unendlich viele Lösungen, die sich mit dem Gauss-Algorithmus bestimmen lassen

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -14 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left|\begin{array}{ll} 2x_1+5x_2 \ -3x_3 & =0 \\ 2x_2- \ \ x_3 & =0 \\ 0\cdot x_3 & =0 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{lll} 2x_1 & =-5x_2+3x_3 = & 2\lambda \\ 2x_2 & = & 4\lambda \\ x_3 & = & 4\lambda \end{array}\right|$$

Die Lösung hängt wegen n – r = 3 – 2 = 1 noch von einem Parameter ab

$x_3 = 4\lambda, \quad x_2 = 2\lambda, \quad x_1 = \lambda$

Zusammenfassung:
Die folgenden Aussagen über eine (n × n)-Matrix sind äquivalent:
a) Die Gleichung des homogenen Systems $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ hat die eindeutige Lösung $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$
b) Für jeden beliebigen n-dimensionalen Spaltenvektor $\vec{\boldsymbol{b}}$ hat das inhomogene System $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ eine eindeutige Lösung.
c) Die Matrix A ist regulär, das heisst es existiert die inverse Matrix A^{-1}.
d) $\det A \neq 0$
e) Die reduzierte Zeilenstufenform von A ist die n-te Einheitsmatrix
f) A lässt sich als Produkt von Elementarmatrizen schreiben.

7. Rangbestimmung einer Matrix mit Determinanten

Der Rang einer beliebigen (m × n)-Matrix kann bekanntlich mit elementaren Zeilenumformungen bestimmt werden.
Er kann aber auch - u.U. mit erheblichem Rechenaufwand - auch mit Unterdeterminanten bestimmt gemäss der folgenden

Definition:
Unter dem Rang einer Matrix **A** vom Typ (m, n) wird die höchste Ordnung r aller von Null verschiedenen Unterdeterminanten von **A** verstanden
Rg(A) = r

Spezialfall:
Bei einer regulären Matrix ist Rg(**A**) gleich bedeutend mit det A ≠ 0:
$Rg(A) = n \leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Beispiel:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
Der Rang der Matrix A kann höchstens 3 sein.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Da alle dreireihigen Determinanten verschwinden, kann der Rang höchstens 2 sein.

Da die zweireihige Unterdeterminante
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$
nicht verschwindet, hat die Matrix **A** den Rang r = 2.

Kontrolle:
Die Matrix kann mit elementaren Zeilenumformungen auf die folgende Form gebracht werden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Rang r ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren oder der Anzahl der führenden Einsen, also r = 2.

Übungsaufgabe:
Rangbestimmung mit Unterdeterminanten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 14 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Die Matrix hat 4 Zeilen, aber nur 3 Spalten. Der Rang kann damit höchstens 3 sein. Zwar verschwinden alle dreireihigen Determinanten. Da die zweireihige Unterdeterminante $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ist der Rang 2.