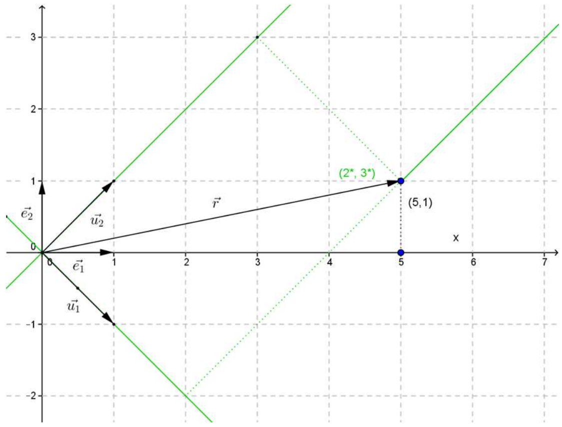
Basiswechsel

In diesem Abschnitt werden die folgenden Fragen untersucht:
A: Wie verändern sich die Komponenten eines Vektors bei einem Basiswechsel?
B: Welcher Zusammenhang besteht zwischen den verschiedenen darstellenden Matrizen einer linearen Abbildung. Diese Fragen werden zunächst am folgenden einfachen Beispiel untersucht:



Frage A:
In der Abbildung ist im Standardsystem der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ dargestellt.
In einem neuen Koordinatensystem (x*, y*) mit gleichem Nullpunkt (in der Abbildung grün gefärbt), dessen Achsen parallel zu den Vektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ sind kann der Vektor $\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ als Linearkombination der neuen Basisvektoren dargestellt werden:

$\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ oder in Komponenten:

$\left| \begin{array}{l} 5 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 \\ 1 = \alpha \cdot (-1) + \beta \cdot 1 \end{array} \right|$ mit der Lösung α = 2 und β = 3.

Im neuen System hat der Vektor $\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ also die Komponenten $\begin{pmatrix}2^*\\3^*\end{pmatrix}$.

Fasst man den Basiswechsel als lineare Abbildung auf, dann geht beim Wechsel vom (x*, y*)-System ins (x, y)-System (nicht umgekehrt) der Basisvektor $\begin{pmatrix}1^*\\0^*\end{pmatrix}$ in den Vektor $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ bzw. der Basisvektor $\begin{pmatrix}0^*\\1^*\end{pmatrix}$ in den Vektor $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ über. Die aus den Bildern der Basisvektoren bestehende Abbildungsmatrix lautet damit:

$S = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ und es gilt:

$\vec{r} = S \cdot \vec{r}^*$

oder nach Multiplikation von links mit S^{-1}

$\vec{r}^* = S^{-1} \cdot \vec{r}$

Im Beispiel ist $S^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$ und die Kontrolle ergibt

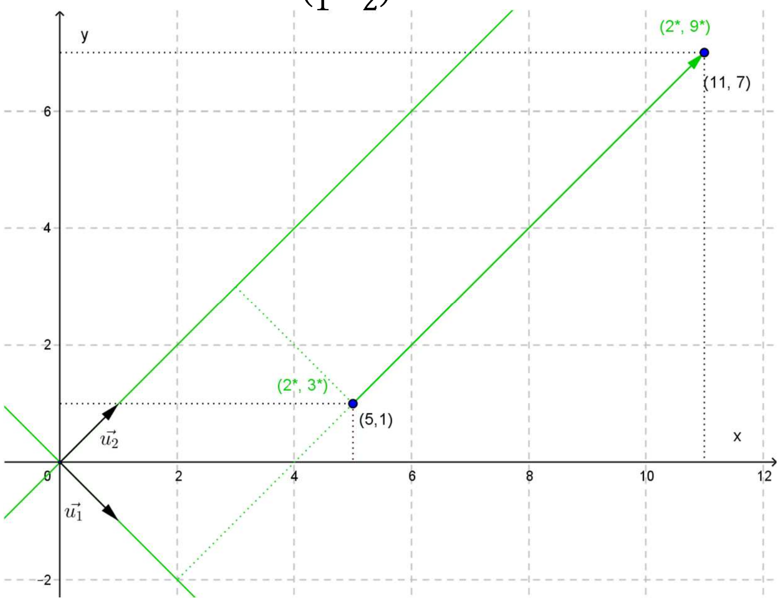
$S^{-1} \cdot \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^*\\3^*\end{pmatrix}$

Allgemein:
Sind $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ die neuen Basisvektoren, dann gilt:
für die Umrechnung vom neuen (x*, y*)-System ins Standardsystem (x, y):
$\vec{r} = S \cdot \vec{r}^*$
wobei S die Matrix ist, deren Spalten aus den Basisvektoren des neuen Systems bestehen.

Frage B:

Gegeben ist eine lineare Abbildung φ in der Grundebene, die bezüglich des Standard-Koordinatensystems die folgende Gleichung hat (es handelt sich um das Beispiel aus dem Kapitel Eigenvektoren):

$\varphi(\vec{r}) = A \cdot \vec{r}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$



Im Standardsystem wird z.B. der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch φ in den Vektor $\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$ abgebildet, denn

$$A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung φ ist von der gewählten Basis abhängig. Wählt man eine Basis, deren Achsen parallel zu den Eigenvektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind (vgl. Abschnitt Eigenvektoren), dann hat die darstellende Matrix bezüglich des neuen Systems Diagonalgestalt $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten in der Diagonalen und es gilt:

$$D \cdot \begin{pmatrix} 2^* \\ 3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^* \\ 3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^* \\ 9^* \end{pmatrix}.$$

Wegen $\lambda_1 = 1$ verändert sich also die x*Komponente nicht, während wegen $\lambda_2 = 3$ die y*-Komponente mit 3 multipliziert wird.

Die Komponenten des Bildvektors können nun mit den neuen Basisvektoren ins Standardsystem umgerechnet werden

$$\begin{pmatrix} 2^* \\ 9^* \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten des Bildvektors im Standardsystem können aber auch durch Multiplikation von links mit S erhalten werden:

$$S \cdot \begin{pmatrix} 2^* \\ 9^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^* \\ 9^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden darstellenden Matrizen A und B der linearen Abbildung φ?

$$\begin{array}{lccc} \text{(x, y) Standardsystem} & & R^2 \xrightarrow{A} R^2 & \\ & S & \uparrow \qquad\quad \downarrow & S^{-1} \\ \text{(x*, y*)-System} & & R^2 \xrightarrow{B} R^2 & \end{array}$$

Für die Matrix B gilt also: $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$ (1)

wobei in den Spalten der Matrix S die Komponenten der beiden neuen Basisvektoren stehen.

Illustration am einführenden Beispiel:

Mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $S^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ erhält man

$B = S^{-1} \cdot A \cdot S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

wie zu erwarten war.

Löst man nach den Rechengesetzen für Matrizen die Gleichung (1) nach A auf, so erhält man:

$A = S \cdot D \cdot S^{-1}$ (2)

mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt also

$A = S \cdot B \cdot S^{-1} =\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot$

Allgemeines Vorgehen:

Gegeben ist die lineare Abbildung φ mit der darstellenden Matrix A bezüglich des Standardsystems.

Voraussetzung: φ hat zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1$und λ_2

In diesem Fall bilden die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ eine Basis. Die zugehörige darstellende Matrix hat Diagonalgestalt $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

und es gilt:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x^* \\ \lambda_2 \cdot y^* \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot x^* \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot y^* \cdot \vec{u}_2$$

Die Komponenten des Bildvektors im Standardsystem können aber auch wie im Beispiel durch Multiplikation von links mit S bestimmt werden.