Elementare Zahlentheorie

Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften, die Zahlentheorie ist die Königin der Mathematik (C. F. Gauss)

Dieses Kapitel handelt von den Eigenschaften der ganzen Zahlen **Z** bzw. der natürlichen Zahlen **N** bzw. $N_0 = \{0,1,2,3,...\}$.

1. Teilbarkeit

Beispiele:
a)
„18 geteilt durch 6 gibt 3 Rest 0“ bedeutet $18 = 3 \cdot 6$
Andere Formulierungen:
„Die Division von 8 durch 6 geht auf“, „6 ist ein Teiler von 18“, „18 ein Vielfaches von 6“
b)
„18 geteilt durch 7 ist 2 Rest 4“
oder „18 ist nicht durch 7 teilbar“ bedeutet $18 = 2 \cdot 7 + 4$

Definition:

Sind d und a natürliche Zahlen, dann sagen wir d teilt a (kurz d/a) genau dann, wenn a ein Vielfaches von d ist:
$d/a \Leftrightarrow$ es gibt q $\in N$ mit $a = q \cdot d$

Folgerung:
Jede Zahl a hat mindestens die Teiler 1 und die Zahl a selbst.
Ist d nicht Teiler von a dann bleibt ein Rest r.

In beiden Fällen gilt der folgende

> Satz:
> Ist a eine beliebige ganze Zahl und d eine ganze Zahl grösser als 0, dann existiert stets eine ganze Zahl q so, dass die Darstellung gilt:
> $a = q \cdot d + r$ mit $0 \leq r < d$

1.1

Beweis:
Eine beliebige ganze Zahl a ist entweder bereits ein Vielfaches von d oder sie liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen von q
$qd < a < (q+1) \cdot d = qd + d.$
Im Fall der Teilbarkeit ist r = 0.
Wegen der linken Ungleichung ist $a - qd = r > 0$ und
Wegen der rechten Ungleichung ist $a - qd = r < d$ und

Eine Anwendung (F. Fricker, Mathemagisches TA 53.1992):

Die **I**nternationale-**S**tandard-**B**uch**N**ummer **ISBN** ist aus vier Teilen aufgebaut. Die ersten drei enthalten Angaben über das Land, den Verlag und den Titel. Der vierte Teil ist eine Prüfziffer, die folgendermassen gebildet wird: Multipliziere die neun vorhergehenden Stellen mit 10, 9, 8, …, 2 und addiere die entsprechenden Produkte.
Für den Titel ISNB 3-7632-1236-X ergibt dies
$30 + 63 + 48 + 28 + 18 + 5 + 8 + 9 + 12 = 221$
Die Prüfziffer besteht nun aus der Ergänzung dieses Resultats auf das nächste Vielfache von 11. Im Beispiel führt dies auf 10, was durch die römische Zahl X dargestellt wird.
Dieser Code ermöglicht es unvollständige oder fehlerhafte Eingaben auszusortieren.
Beispiele:

a) ISBN 3-7653-100?-X	die vorletzte Ziffer ist unleserlich
b) ISBN 3-411-01205-1	zwei aufeinanderfolgende Ziffern sind vertauscht

Lösung

a) ISBN 3-7653-100**0**-X	Brockhaus
b) ISBN 3-411-012**50**-1	Meyers Lexikon

2. Der Euklidische Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus ermöglicht die Bestimmung des grössten gemeinsamen Teilers (ggT) zweier natürlicher Zahlen a und b, abgekürzt g = (a, b).

Beispiele zur Vorbereitung
a)
18 hat die Teiler 1, 2, 3, 6, 9, 18
30 hat die Teiler 1, 2, 3, 5, 6, 15, 30
18 und 30 haben die gemeinsamen Teiler 1, 2, 3, 6
6 ist der grösste gemeinsame Teiler von 18 und 30.
Wir schreiben dafür (18, 30) = 6

b)
3 ist Teiler von 18, denn 18 = 3·6 und
3 ist Teiler von 33, denn 33 = 3·11.
Folgerung: 3 ist auch Teiler der Differenz 33 - 18 = 15.

Allgemein gilt der folgende

> Satz:
> Von zwei natürlichen Zahlen a und b sei a die grössere. Wenn d Teiler von a und b ist, dann ist d auch Teiler der Differenz a - b.

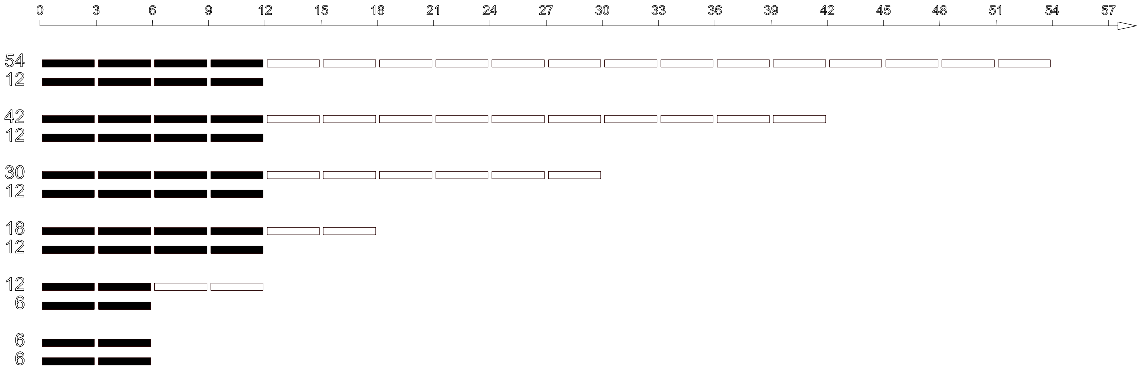
2.1

Beweis:
Sei a = p· d und b = q· d . Dann gilt a - b = p· d - q d = d·(p - q) $(p-q)\epsilon N$

Dieser Satz gilt insbesondere auch für den grössten gemeinsamen Teiler.

Vorbereitendes Beispiel zum Euklidischen Algorithmus

(54, 12) =?



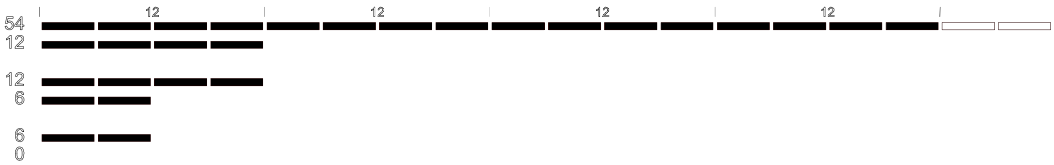
d ist Teiler von 54 und 12 also auch von 54 - 12 = 42	(54, 12) = (42, 12)
d ist Teiler von 42 und 12 also auch von 42 - 12 = 30	(42, 12) = (30, 12)
d ist Teiler von 30 und 12 also auch von 30 - 12 = 18	(30, 12) = (18, 12)
d ist Teiler von 18 und 12 also auch von 18 - 12 = 6	(18, 12) = (12, 6)
d ist Teiler von 12 und 6 also auch von 12 - 6 = 6	(12, 6) = (6, 6)

(54,12) = 6.

Dieses Verfahren zur Bestimmung des ggT stammt von Euklid (um 365 v. Chr.) In seinem Hauptwerk "Die Elemente" hat er das mathematische Wissen seiner Zeit zusammengefasst.

Schritt	a	b	
0	12	54	vertauschen
1	54	12	
2	42	12	
3	30	12	
4	18	12	12 wurde 4-mal subtrahiert
5	6	12	vertauschen 6 ist der Rest der Division 54:12
6	12	6	
7	6	6	
8	0	6	die letzte von 0 verschiedene Zahl ist.

Werden die Schritte 1 - 4 zusammengefasst, so vereinfacht sich das Verfahren:



0	12	54	vertauschen
1	54	12	54 : 12 = 4 Rest 6
6	12	6	
8	**6**	0	die letzte von 0 verschiedene Zahl ist der ggT.

Allgemein:

Der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung des ggT zweier Zahlen a und b Ersetze das vorgegebene Zahlenpaar fortlaufend durch das Paar, das aus der kleineren der beiden Zahlen und dem Rest bei der Division der grösseren durch die kleinere Zahl besteht. Der letzte von Null verschiedene Rest ist der ggT.	2.2

Unter einem Algorithmus versteht man ein Verfahren, das den Lösungsweg eines Problems genau und vollständig beschreibt.

Beispiel:

	allgemein:		
$792 = 10\cdot 75 + 42$	$r_0 = q_1\cdot r_1 + r_2$	$0 < r_2 < r_1$	
$75 = 1\cdot 42 + 33$	$r_1 = q_2\cdot r_2 + r_3$	$0 < r_3 < r_2$	
$42 = 1\cdot 33 + 9$			2.3
$33 = 3\cdot 9 + 9$	.....		
$9 = 1\cdot 6 + 3$	$r_{n-2} = q_{n-1}\cdot r_{n-1} + r_n$	$0 < r_n < r_{n-1}$	
$6 = 2\cdot 3 + 0$	$r_{n-1} = q_n\cdot r_n + 0$		

Behauptung: r_n ist der grösste gemeinsame Teiler von $a = r_0$ und $b = r_1$.

Beweis:
Durchläuft man den Algorithmus von unten nach oben, so erkennt man, dass r_n ein Teiler von r_{n-1}, also auch von r_{n-2}, usw. und schliesslich auch von r_0 und r_1 ist.
Durchläuft man den Algorithmus von oben nach unten, so erkennt man, dass jeder gemeinsame Teiler von a und b, also auch der grösste ein Teiler von r_2, von r_3 .. und schliesslich von r_n ist.

Der folgende Begriff bringt eine Vereinfachung:

Einführende Beispiele:
Dividiert man 13 durch 5 so erhält man **2** Rest **3** d.h. es gilt 13 = **2**·5 + **3.**
oder kurz:
13 div 5 = **2** bzw. 13 mod 5 = **3**
60 div 25 = 2, 60 mod 25 = 10

Definition:
Gilt $a = q\cdot b + r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \le r < b$, dann definieren wir
a div b = q
a mod b = r = a - q·b

Statt a mod b = r schreibt man auch $a \equiv r \bmod b$ "a ist kongruent r modulo b"
Damit kann der Euklidische Algorithmus auch folgendermassen formuliert werden

Euklidischer Algorithmus (2. Fassung)

Wenn a < b, dann vertausche a und b
Wiederhole
    Ersetze a durch b und b durch a mod b
bis b = 0
Ausgabe a

2.4

Übungsaufgaben:
Gesucht ist der grösste gemeinsame Teiler
a) ggT(560, 91) b) ggT(972, 666) c) ggT(323, 221) d) ggT(17360, 7254)
e) Wie kann der Bruch $\frac{3243}{3901}$ gekürzt werden?

Lösungen:

a) ggT(560, 91) = ggT(91, 14) = ggT(14, 7) = 7
b) ggT(972, 666) = ggT(666, 306) = ggT(306, 54) = ggT(54,36) = ggT(36,18) = 18
c) ggT(323, 221) = 17
d) ggT(17360, 7254) = 62
e) ggT(3243,3901) = 47 $\frac{3243}{3901} = \frac{69 \cdot 47}{83 \cdot 47} = \frac{69}{83}$

Das kleinste gemeinsame Vielfache kgV(a, b).

Einführendes Beispiel:
ggT(4, 6) = 2 und kgV(4, 6) = 12
$ggT(4,6) \cdot kgV(4,6) = 24 = 4 \cdot 6$

Dieser Zusammenhang besteht allgemein und es gilt:

Satz:
Für alle a, b $\in$ N gilt:
$ggT(a,b) \cdot kgV(a,b) = a \cdot b$

2.5

Der Beweis ergibt sich später mit der eindeutigen Primfaktorzerlegung.

Ist der grösste gemeinsame Teiler der beiden Zahlen bekannt, dann ergibt sich mit dem Satz das kleinste gemeinsame Vielfache unmittelbar.

Beispiel:
ggT(6930, 1098) = 18 also
$$kgV(6930, 1098) = \frac{a \cdot b}{ggT(a,b)} = \frac{6930 \cdot 1098}{18} = 422730$$

Übungsaufgaben:
a) kgV(440, 198)
b)
Auf einer 400m-Rundbahn starten zwei Läufer gleichzeitig. Läufer A braucht 75s pro Bahnrunde, Läufer braucht 81s pro Runde. Wie lange laufen sie, wenn sie vereinbart haben, so lange zu laufen, bis sie wieder gleichzeitig beim Start vorbeilaufen.

Lösungen:
a) ggT(440, 198) = 22, $kgV(440, 198) = \frac{440 \cdot 198}{22} = 3960$
b) kgV(75, 81) = 2025. Nach 33'45" und 10.8km (A) bzw. 10.0km (B) treffen sie sich beim Start.

3. Kalenderprobleme

3.1 Wochentag eines Datums

Quelle: A. Stucki, VSMP-Bulletin 10.2003

Die folgenden Überlegungen illustrieren wir am Beispiel 13. Mai 1960. Im Folgenden wird untersucht, wie viele Wochentage seit dem 31.12.1899 und dem 13. Mai 1960 vergangen sind, wobei wir uns auf die Anzahl modulo 7 beschränken können, denn der 13. Mai fällt auf den gleichen Wochentag wie der 6. oder 13. denn $13 \equiv 6 \ (mod 7)$.
1. Der Einfluss des Tages:
Als erstes Zwischenresultat wird $D_1 = 6$ notiert.

2. Der Einfluss des Monats
Der Januar zählt ab 1.1. 4 Wochen und 3 Tage. Der Wochentag des 1. Februar verschiebt sich also bezüglich des 1.1. um 3 Tage.
Da der Februar in der Regel 28 Tage zählt ($28 \equiv 0 \ (mod 7)$ bewirkt er keine zusätzliche Verschiebung, sie beträgt also bezüglich des 1.1. immer noch 3.
Da der März 31 Tage zählt, ergibt sich für den 1. April eine zusätzlich Verschiebung um 3, insgesamt eine Verschiebung um 6 bezüglich dem 1.1.
Da der April 30 Tage zählt verschiebt sich der Wochentag des 1.April um $6 + 2 = 8 \equiv 1 \ (mod\ 7)$
In der folgenden Tabelle sind die Verschiebungen für die einzelnen Monate bezüglich des 1.1. aufgeführt:

Jan	Feb	Mär	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

Im Beispiel (Mai) beträgt die Verschiebung also $D_2 = 1$

3. Der Einfluss der Nicht-Schaltjahre.
Da $365 \equiv 1 \ (mod 7)$ verschiebt sich der Wochentag jährlich um einen Tag, in den 60 Jahren seit dem 1.1.1899 also um $60 \equiv 4 \ (mod\ 7)$
Als Korrektur für ein Nicht-Schaltjahr ergibt sich damit $D_3 = 4$

4. Der Einfluss der Schaltjahre
In den Schaltjahren (Vielfache von 4 ausser 1900) wird ein Schalttag eingeschoben. Da $[60 \div 4] = 15 \equiv 1 \ (mod\ 7)$ beträgt die Korrektur $D_4 = 1$.

5. Der Einfluss der Monate Januar und Februar in Schaltjahren
In Schaltjahren wird der Schalttag auch in den Monaten Januar und Februar berücksichtigt, der noch nicht eingetreten ist.
Für diese Monate beträgt die Korrektur D_5 = -1 für die restlichen des Jahres D_5 = 0
Die Summe $S = D_1{+}D_2{+}D_3{+}D_4{+}D_5 \ (mod\ 7)$ ergibt die Verschiebung des 13. Mai 1960 bezüglich des 31. Dezember 1899, der ein Sonntag war: S = 5

Der Summe S entsprechen damit folgende Wochentage:

S = 1	S = 2	S = 3	S = 4	S = 5	S = 6	S = 7
Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So

Der 13. Mai 1960 war damit ein Freitag.

Datum, Wochentag

Datum	TT	MM	JJJJ
	1	1	2015
seit 1900			115
D1		1	

Verschiebungstabelle

Jan	Feb	März	Apr	Mai	Juni	Juli	Aug	Sept	Okt	Nov	Dez
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

D2 0

Anzahl Jahreswechsel
Differenz bez. 1900
115 mod 7

D3 3

Anzahl Schaltjahre
bez. 1900
28 mod 7

D4 0

Schalttag Jan/Feb sonst

D5 WAHR -1

Summe S 3

3 JJJJ>1999? -1

mod 7
S 3

Tabelle S	1	2	3	4	5	6	0
	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag

war ein Mittwoch

Der	13.05.1960	war ein	Freitag
Der	01.01.1964	war ein	Mittwoch
Der	30.09.1964	war ein	Mittwoch
Der	31.12.1999	war ein	Freitag
Der	01.01.2000	war ein	Samstag
Der	25.05.2014	war ein	Sonntag
Der	31.12.2013	war ein	Dienstag
Der	11.07.2015	war ein	Samstag

3.2 Osterformel von Gauss

Am ersten ökumenischen Konzil in Nikäa (Nähe Istanbul) veranlasste Kaiser Konstantin im Jahre 325, dass Ostern am ersten Sonntag nach dem ersten Vollmond nach der Frühlings-Tagundnachtgleiche gefeiert werden soll. Nach C. F. Gauss kann für das Jahr n mit $1900 \leq n < 2099$ das Osterdatum bestimmt werden. Das verfahren wird am Beispiel n = 2014 erläutert.

Osterformel von Gauss

Jahr n
2014

a = n mod 19	**0**	**=REST(A4;19)**
b = n mod 4	**2**	**=REST(A4;4)**
c = n mod 7	**5**	**=REST(A4;7)**
Gregorianischer Kalender		
d = n div 100	20	=GANZZAHL($A$4/100)
e = n div 400	5	=GANZZAHL($A$4/400)
f = n div 300	6	=GANZZAHL($A$4/300)
	24	=C12-C13-C14+15
x = (d - e - f + 15) mod 30	**24**	**=REST(C15;30)**
	19	=C12-C13+4
y = (d - e + 4) mod 7	**5**	**=REST(C17;7)**
	24	=19*C6+C16
g = (19a + x) mod 30	**24**	**=REST(C20;30)**
	173	=2*C7+4*C8+6*C21+C18
h = (2b + 4c +6g + y) mod 7	**5**	**=REST(C22;7)**
M = 22 + g + h	51	=22+C21+C23
Osterdatum	**20. April**	**=WENN(C25>31;C25-31;C25)**
		=WENN(C25>31;". April";". März")
Ausnahmefälle		
Fall1		h = 6 und g = 29
Fall2		h = 6 und g = 28 und a > 10
dann gilt:		
M = 15 + d + e		

Bemerkungen:
Der frühestmögliche Zeitpunkt ist der 22. März (er wird aber erst in etwa 300 Jahren eintreten).
Die Berechnung hat die folgenden Themen zu berücksichtigen:
- Scheinbare Bewegung der Sonne und Kalender (Tagundnachtgleiche)
- Bewegung des Mondes und Kalender (Vollmond)
- Wochentag (Sonntag)

Zur Begründung vgl. etwa Karl Mütz: unser Kalendersystem in PM 1/42. Jg. 2000.

3.3 Freitag der 13.

Übungsaufgabe:
a) Wie oft pro Jahr fällt eine Freitag auf den 13.?
b) Wie gross ist der kürzest mögliche Abstand zwischen zwei Freitagen den 13.?
c) Wie gross ist der längste Abstand zwischen zwei Freitagen den 13.?

Lösungen:
a) minimal 1, maximal 3 Freitag der 13.
b) 4 Wochen: Beispiele: 13.2.2009, 13.2.2015
c) 14 Monate: Beispiele:
13.7.2012/13.9.2013 (kein Schaltjahr), 13.7.2018/13.9.2019)
13.8.1999/13.10.2000 (Schaltjahr), 13.8.2027/13.10.2028.

4. Diophantische Gleichungen

Nach dem Mathematiker Diophantos (~ 250 n. Chr.) heissen Probleme, die mit der ganzzahligen Lösung von Gleichungen zusammenhängen, diophantische Gleichungen. Geometrisch kann die Lösung der Gleichung

$$ax + by = c \qquad 4.1$$

als Bestimmung der Gitterpunkte (d.h. der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) auf der entsprechenden Geraden aufgefasst werden.

Als Anwendung des Euklidischen Algorithmus wird sich zeigen, dass ganzzahlige Lösungen dieser Gleichung genau dann existieren, wenn c durch den grössten gemeinsamen Teiler von a und b teilbar ist. Der grösste gemeinsame Teiler (a, b) kann nämlich als Linearkombination der ganzen Zahlen a und b $\neq 0$ dargestellt werden:
ggT(a, b) = $a \cdot x + b \cdot y$ mit $x, y \in$ Z.
Sind insbesondere a und b teilerfremd, dann gilt $1 = a \cdot x + b \cdot y$.

Eine spezielle Lösung der Gleichung 4.1 ergibt sich, indem im Schema des Euklidischen Algorithmus 2.3 jede Zeile nach dem Rest aufgelöst wird. Werden wie im folgenden Beispiel beginnend mit der letzten Zeile die vorkommenden Reste ersetzt, so ergibt sich schliesslich eine Darstellung des ggT in der Form
r_n =ggt(a,b) = ax + by mit $x, y \in$ Z.

Beispiel
$37x + 96y = 1$

Zunächst wird der ggT(37, 96) bestimmt:

$\mathbf{96} = 2 \cdot 37 + 22$	$22 = 96 - 2 \cdot 37$
	$\mathbf{1} = 3 \cdot 37 - 5 \cdot 22 =$
	$= 3 \cdot 37 - 5 \cdot (96 - 2 \cdot 37) = \mathbf{13} \cdot \mathbf{37} - \mathbf{5} \cdot \mathbf{96}$
$37 = 1 \cdot 22 + 15$	$15 = 37 - 1 \cdot 22$
	$1 = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 22 = 3 \cdot (37 - 1 \cdot 22) - 2 \cdot 22$
	$= 3 \cdot 37 - 5 \cdot 22$
$22 = 1 \cdot 15 + 7$	$7 = 22 - 1 \cdot 15$
	$1 = 15 - 2 \cdot 7 = 15 - 2 \cdot (22 - 1 \cdot 15)$
	$= 3 \cdot 15 - 2 \cdot 22$
$15 = 2 \cdot 7 + 1$	$1 = 15 - 2 \cdot 7$

Die Gleichung $37x - 96y = 1$ hat folglich die spezielle Lösung x = **13** und y = **-5**
Da bei einer inhomogenen linearen Gleichung die Differenz zweier Lösungen eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $ax + by = 0$ ist, besteht die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.
Aus $ax + by = 0$ folgt $ax = -by$
Bezeichnen wir abkürzend ggT(a, b) mit g, dann gilt also $a = ga'$ und $b = gb'$
Die Gleichung $ax = -by$ ist also äquivalent zu
$a'x = -b'y$

Da a' und b' teilerfremd sind muss x durch b' und y durch a' teilbar sein. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung hat also die Form $x = t \cdot b'$ und $y = -t \cdot a'$.

Beispiel:
Die Gleichung $37x + 96y = 1$ hat die allgemeine Lösung
$x = 13 + t \cdot 96$ und $y = -5 - t \cdot 37$.

Allgemein gilt der folgende

Satz: 4.2

Die Gleichung $ax + by = c$ ist genau dann lösbar, wenn (a, b) ein Teiler von c ist.
Ist x_0, y_0 ein Lösungspaar der diophantischen Gleichung (*) $ax + by = c$,
wobei (a, b) = g ein Teiler von c ist, dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch
$x = x_o + t \cdot \frac{b}{g}$ $\qquad y = y_0 - t \cdot \frac{a}{g}$ $\qquad t \in \mathbf{Z}$
oder im Spezialfall (a, b) = 1
$x = x_o + t \cdot b$ $\qquad y = y_0 - t \cdot a$

Beispiel für eine Aufgabe, die keine Lösung hat:
$5x - 10y = 13$.
Der grösste gemeinsame Teiler von 5 und 10 ist 5, 5 ist aber nicht Teiler von 13.

Übungsaufgaben:
Es ist jeweils die allgemeine Lösung der diophantischen Gleichung gesucht
a)
$55x - 13y = 1$

b)
$792x - 75y = 3$
Tipp:
Die Lösung wird einfacher, indem man zunächst die Gleichung durch den grössten gemeinsamen Teiler dividiert.
c)
$210x - 704y = 2$
Tipp: teile durch (210, 704) = 2

d)
$299x - 247y = 13$
e)
$12x + 18y = 4$
f)
$16x + 7y = 601$
g)
$14x + 35y = 21$
h)
$49x - 19y = 900$

Lösungen:
a)
allgemeine Lösung
$x = 9 + t \cdot 13$ $y = 38 - t \cdot 55$
b)
Die Gleichung kann durch den grössten gemeinsamen Teiler (792, 75) = 3 geteilt werden
$264x - 25y = 1$ hat die allgemeine Lösung
$x = 9 + t \cdot 25$ $y = 95 - t \cdot 264$
c)
$x = 57 + t \cdot 352$ d) $y = 17 - t \cdot 105$

$x = 5 + t \cdot 19$ $y = 6 - t \cdot 23$
e)
keine Lösung
f)
$x = 24 + t \cdot 7$ $y = 31 - t \cdot 16$
g)
$x = 4 + t \cdot 5$ $y = -1 - t \cdot 2$
h)
ggT(49,19) = 1 $1 = 49 \cdot (7 + 19t) - 19 \cdot (18 + 49t)$
mit 900 multiplizieren
$x = 7 \cdot 900 = 6300$ $y = 18 \cdot 900 = 16200$

5. Kettenbrüche

Kettenbrüche sind die besten Näherungsbrüche für eine gegebene rationale (oder irrationale) Zahl, wenn möglichst kleine Zähler und Nenner verwendet werden sollen. Der Euklidische Algorithmus ermöglicht eine Bestimmung der Kettenbruchentwicklung.
Eine Anwendung ergibt sich bei Zahnradmodellen

Beispiele:
a)
Kettenbruchentwicklung von $\frac{21}{15}$
$21 = 1 \cdot 15 + 6$ oder $\frac{21}{15} = 1 + \frac{6}{15} = 1 + \frac{1}{\frac{15}{6}}$
$15 = 2 \cdot 6 + 3$ oder $\frac{21}{15} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3}{6}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{6}{3}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$

Es wird die abgekürzte Schreibweise [1; 2, 2] verwendet.
Für den Kehrwert des Bruchs gilt [0; 1, 2, 2]

b)

Kettenbruchentwicklung von $\frac{465}{201}$

$$\frac{465}{201} = 2 + \frac{63}{201} = 2 + \frac{1}{\frac{201}{63}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{12}{63}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{63}{12}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{3}{12}}}$$

$$\frac{465}{201} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{4}}}$$

$$\frac{465}{201} = [2; 3, 5, 4]$$

Beste Näherungsbrüche: $2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}, \quad \frac{37}{16}, \quad \frac{155}{67}$

Übungsaufgaben:

a)

Wie heisst die Kettenbruchentwicklung von $\frac{9976}{6961}$?

b)

Welches sind die ersten 5 Näherungsbrüche für 3.14159?

c)

Welches sind die 4 ersten Näherungsbrüche für $\sqrt{2}$?

Lösungen:

a)

[1; 2, 3, 4, 5, 6, 7]

b)

3, $\frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}$

c)

[1; 2, 2, 2, 2, ….] 1, $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}$